第 3 回　確率・確率変数・確率分布（3.1–3.2, 3.4）

村澤 康友

2024 年 4 月 23 日

今日のポイント

1. 試行において起こりうる結果を標本点，標本点全体の集合を標本空間，標本空間の部分集合を事象という．事象に対して定義され，確率の公理を満たす関数を確率という．
2. B が起こったという条件の下での A の条件つき確率は $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$．$P(A|B) = P(A)$ なら A と B は独立という．$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ で定義してもよい．
3. 試行の結果によって値が決まる変数を確率変数という．確率変数の分布を確率分布という．
4. 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数を X の累積分布関数 (cdf)，$\Pr[X = x]$ を与える関数を X の確率質量関数 (pmf)，積分すると累積分布関数が得られる関数（累積分布関数の導関数）を確率密度関数（pdf）という．それぞれ $F_X(.)$, $p_X(.)$, $f_X(.)$ で表す．
5. 確率変数 X の期待値は，離散なら $\mathrm{E}(X) := \sum_x x p_X(x)$，連続なら $\mathrm{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x$.
6. 確率変数の特徴は積率で表せる．X の k 次の積率は $\mathrm{E}\left(X^k\right)$，中心積率は $\mathrm{E}\left((X - \mu_X)^k\right)$．1 次の積率を平均，2 次の中心積率を分散という．

目次

1　確率

1.1　標本空間（p. 33）

定義 1. 結果が偶然に支配される実験を**試行**という．

例 1. コイントス，サイコロ，電球の寿命，明日の天気.

定義 2. 試行において起こりうる結果を**標本点**という.

定義 3. 標本点全体の集合を**標本空間**という.

例 2. コイントスなら $\{H, T\}$，サイコロなら $\{1, \ldots, 6\}$，電球の寿命なら $(0, \infty)$.

注 1. 標本点を ω, 標本空間を Ω で表すことが多い.

1.2 事象（p. 33）

定義 4. 標本空間の部分集合を**事象**という.

例 3. コイントスの事象は $\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega$.

定義 5. 空集合の事象を**空事象**という.

定義 6. 標本空間全体の事象を**全事象**という.

定義 7. ただ 1 つの標本点から成る事象を**根元事象**という.

定義 8. 複数の標本点から成る事象を**複合事象**という.

1.3 集合算（p. 36）

ある試行の事象を A, B, C とする.

定義 9. $A \cup B$ を A と B の**和事象**という.

定義 10. $A \cap B$ を A と B の**積事象**という.

定義 11. $A \cap B = \emptyset$ なら A と B は**排反**という.

定義 12. A^c を A の**余事象**という.

定理 1 (交換法則)**.**

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

定理 2 (結合法則)**.**

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

定理 3 (分配法則)**.**

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

定理 4 (ド・モルガンの法則)**.**

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned}$$

1.4 確率（p. 34）

定義 13. 事象に対して定義され，以下の公理を満たす関数 $P(.)$ を**確率**という.

1. $0 \leq P(.) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. （σ 加法性）$A_1, A_2, \ldots$ が排反なら

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

例 4. 公正なコイントスなら

$$P(A) := \begin{cases} 0 & \text{for } A = \emptyset \\ 1/2 & \text{for } A = \{H\}, \{T\} \\ 1 & \text{for } A = \Omega \end{cases}$$

定理 5.

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

証明. 省略. □

定理 6.

$$P(\emptyset) = 0$$

証明. 省略. □

定理 7.

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

証明. 省略. □

定理 8 (加法定理)**.**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

証明. ベン図で確認できる. □

2　条件つき確率と事象の独立性

2.1　条件つき確率（p. 39）

ある試行の事象を A, B とする．

定義 14. B が起こったという条件の下での A の**条件つき確率**は

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ただし $P(B) > 0$.

注 2. B を標本空間としたときの $A \cap B$ の確率.

定理 9 (乗法定理)**.**

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

証明. 条件つき確率の定義より明らか. □

2.2　事象の独立性（p. 41）

定義 15. $P(A|B) = P(A)$ なら A と B は**独立**という．

注 3. B において $A \cap B$ が起こる確率と，Ω において A が起こる確率が等しい．そのため B が起こったという情報が，A が起こる確率に影響しない.

注 4. 乗法定理より，以下の 3 つは同値.

$$\begin{gathered} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{gathered}$$

3　確率分布

3.1　確率変数（p. 42）

定義 16. 試行の結果によって値が決まる変数を**確率変数**という．

例 5. コイントスに対して

$$X := \begin{cases} 1 & （表） \\ 0 & （裏） \end{cases}$$

とすれば X は確率変数.

定義 17. 確率変数の分布を**確率分布**という．

注 5. 度数分布と似た概念.

3.2　累積分布関数（p. 46）

確率変数 X の確率分布を表現する.

定義 18. 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数を X の**累積分布関数**（*cumulative distribution function, cdf*）という．

注 6. $F_X(.)$ で表す．すなわち $F_X(x) := \Pr[X \leq x]$.

注 7. 弱い不等号 $\leq$ で定義する.

注 8. 度数分布の累積相対度数に相当.

例 6. X をサイコロの目の数とすると

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/6 \\ \vdots & \\ 6 & \text{with pr. } 1/6 \end{cases}$$

X の cdf は

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1/6 & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ \vdots & \\ 5/6 & \text{for } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{for } 6 \leq x \end{cases}$$

$F_X(.)$ のグラフは図 1 の通り.

$F_X(.)$ は以下の性質をもつ.

定理 10 (増加関数)**.**

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

証明. 省略. □

定理 11.

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

証明. 省略. □

定理 12 (右連続)**.** 任意の x_0 において

$$\lim_{x \downarrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$$

証明. 省略. □

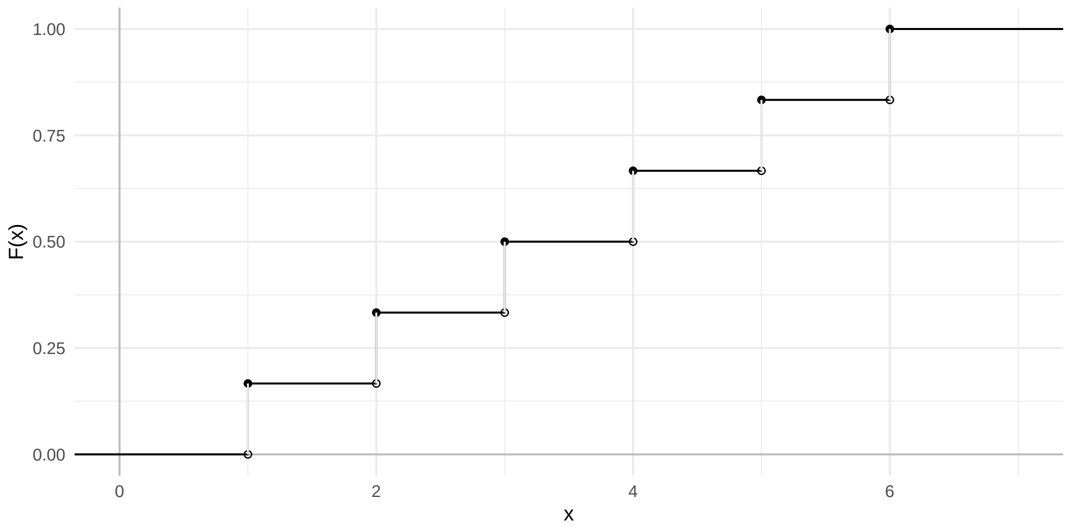

図 1　サイコロの目の cdf

注 9. 左連続とは限らない.

注 10. 逆に以上の性質をもつ $F(.)$ は cdf.

3.3　離散分布の確率質量関数（p. 44）

定義 19. 取りうる値の集合が可算である確率変数を**離散確率変数**という.

定義 20. 離散確率変数の確率分布を**離散分布**という.

定義 21. 任意の x に対して $\Pr[X = x]$ を与える関数を X の**確率質量関数**（*probability mass function, pmf*）という.

注 11. $p_X(.)$ で表す．すなわち $p_X(x) := \Pr[X = x]$.

注 12. 度数分布の相対度数に相当.

注 13. cdf の定義より

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\ &= \sum_{x' \le x} \Pr[X = x'] \\ &= \sum_{x' \le x} p_X(x') \end{aligned}$$

また

$$\sum_x p_X(x) = 1$$

逆にこれを満たす非負の $p(.)$ は pmf.

例 7. X をサイコロの目の数とすると, X の pmf は

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{for } x = 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$p_X(.)$ のグラフは図 2 の通り.

3.4　連続分布の確率密度関数（p. 58）

ルーレットの円周は非可算無限個の点から成る．この場合，個々の点で止まる確率は 0（無限小）なので，pmf は役に立たない.

定義 22. 連続な cdf をもつ確率変数を**連続確率変数**という.

定義 23. 連続確率変数の確率分布を**連続分布**という.

定義 24. 任意の x について

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

となる $f_X(.)$ を X の**確率密度関数**（*probability density function, pdf*）という.

注 14. 任意の a, b について

$$\Pr[a < X \le b] = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

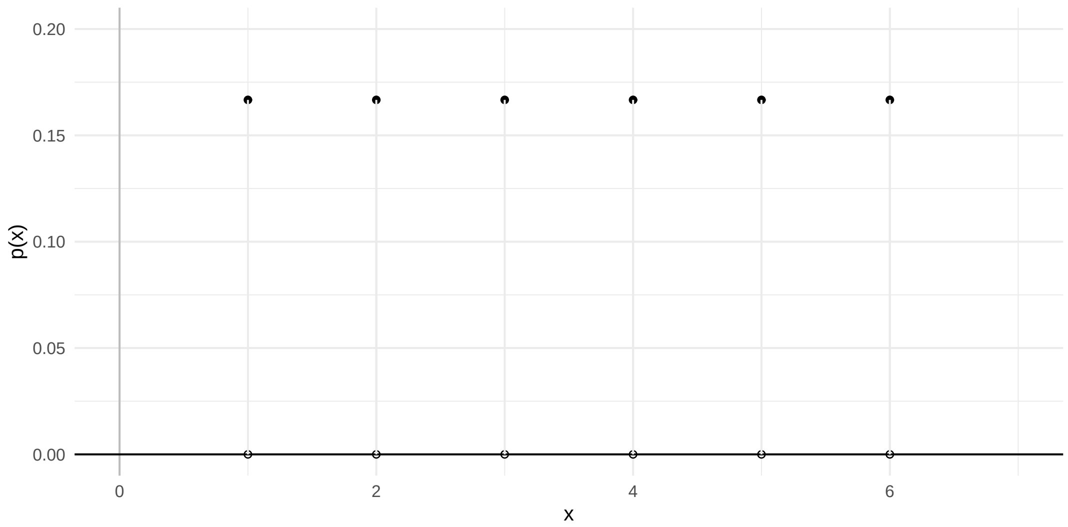

図 2　サイコロの目の pmf

図 3 を参照．また

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

逆にこれを満たす非負の $f(.)$ は pdf.

注 15. $F_X(.)$ が微分可能なら，微分積分学の基本定理より

$$f_X(x) := F_X'(x)$$

4　期待値

4.1　期待値（p. 46）

X を確率変数とする．

定義 25. X の**期待値**は

$$\mathrm{E}(X) := \begin{cases} \sum_x x p_X(x) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x & \text{（連続）} \end{cases}$$

注 16. pmf・pdf を重みとした加重平均.

例 8. 次の確率変数を考える．

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

X の期待値は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) \\ &= p \end{aligned}$$

4.2　確率変数の関数の期待値

定義 26. $g(X)$ の**期待値**は

$$\mathrm{E}(g(X)) := \begin{cases} \sum_x g(x) p_X(x) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x & \text{（連続）} \end{cases}$$

4.3　期待値の線形性（p. 55）

定理 13. 任意の a, b について

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

証明．復習テスト． □

注 17. より一般的に (X, Y) の 2 変量分布について

$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)$$

5　積率

5.1　積率

定義 27. X の k **次の積率**は

$$\mu_{X,k} := \mathrm{E}\left(X^k\right)$$

定義 28. 1 次の積率を**平均**という．

注 18. μ_X と表す．

注 19. 確率変数の平均は期待値であり，データの（算術）平均とは異なる．

図 3　pdf による確率の評価の例：$\Pr[0 < X \leq 1] = \int_0^1 f_X(x)\mathrm{d}x$

5.2　中心積率（p. 48）

定義 29. X の k **次の中心積率**は

$$\mu'_{X,k} := \mathrm{E}\left((X - \mu_X)^k\right)$$

定義 30. 2 次の中心積率を**分散**という．

注 20. $\mathrm{var}(X)$ と書く．すなわち

$$\mathrm{var}(X) := \mathrm{E}\left((X - \mu_X)^2\right)$$

定義 31. 分散の平方根を**標準偏差**という．

注 21. σ_X と表す．

例 9. 次の確率変数を考える．

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

$\mu_X = p$ より X の分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &:= (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

定理 14.

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mu_X^2$$

証明. 復習テスト． □

定理 15. 任意の a, b について

$$\mathrm{var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{var}(X)$$

証明. 復習テスト． □

6　今日のキーワード

試行，標本点，標本空間，事象，空事象，全事象，根元事象，複合事象，和事象，積事象，排反，余事象，確率，条件つき確率，独立，確率変数，確率分布，累積分布関数（cdf），離散確率変数，離散分布，確率質量関数（pmf），連続確率変数，連続分布，確率密度関数（pdf），期待値，積率，平均，中心積率，分散，標準偏差

7　次回までの準備

復習　教科書第 3 章 1–2, 4 節，復習テスト 3
予習　教科書第 3 章 3, 5 節