第 12 回　パネル・データ（9）

村澤 康友

2024 年 1 月 9 日

今日のポイント

1. 処置が無作為でなく共変量が欠落すると，平均処置効果（ATE）を OLS で推定できない．処置群と対照群の変化の差で ATE を推定する手法を差分の差分（DID）法という．共変量の変化の期待値が処置群と対照群で等しければ（平行トレンドの仮定），DID 法で ATE を推定できる．
2. 個体に固有で観測を通じて一定の効果を個別効果という．観測できない個別効果は欠落変数バイアスをもたらす．パネル・データなら観測できない個別効果を統制できる．
3. 非確率的な個別効果を固定効果という．固定効果は個別ダミーで統制する．確率的な個別効果を変量効果という．変量効果が説明変数と無相関なら欠落変数バイアスは生じない．変量効果モデルの定式化は Hausman 検定で検定できる．

目次

1 差分の差分（DID）法

1.1 欠落変数バイアス

(Y, D, X) を確率ベクトルとする．ただし Y は結果，D は処置群ダミー，X は共変量とする．Y に対する D の平均処置効果（ATE）を推定したい．Y の (D, X) 上への重回帰モデルは

$$\mathrm{E}(Y|D,X) = \alpha + \mathrm{ATE} \cdot D + \beta X$$

X が欠落すると，繰り返し期待値の法則より

$$\mathrm{E}(Y|D) = \alpha + \mathrm{ATE} \cdot D + \beta\,\mathrm{E}(X|D)$$

処置群の母平均を $\mu_1 := \mathrm{E}(Y|D=1)$，対照群の母平均を $\mu_0 := \mathrm{E}(Y|D=0)$ とする．

定理 1.

$$\mu_1 - \mu_0 = \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(X|D=1) - \mathrm{E}(X|D=0))$$

証明.

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_0 &= \mathrm{E}(Y|D=1) - \mathrm{E}(Y|D=0) \\ &= \alpha + \mathrm{ATE} + \beta\,\mathrm{E}(X|D=1) \\ &\quad - (\alpha + \beta\,\mathrm{E}(X|D=0)) \\ &= \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(X|D=1) - \mathrm{E}(X|D=0))\end{aligned}$$

□

注 1. 処置が無作為なら $\mathrm{E}(X|D) = \mathrm{E}(X)$ より第 2 項は 0. そうでなければ $\mu_1 - \mu_0 \neq \mathrm{ATE}$（欠落変数バイアス).

定義 1. 処置を自ら選択することを**自己選択**という.

注 2. 人間が対象だと処置を強制できない. 処置の選択に個人差があるなら $\mathrm{E}(X|D=1) \neq \mathrm{E}(X|D=0)$.

1.2 差分の差分（DID）法（p. 214）

(Y_t, X_t) を時点 $t = 0, 1$ の確率ベクトルとし, 処置群に対して時点 1 に処置を行う. 処置群ダミーを D とすると, Y_t の (D, X_t) 上への回帰モデルは

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y_0|D, X_0) &= \alpha + \beta X_0 \\ \mathrm{E}(Y_1|D, X_1) &= \alpha + \mathrm{ATE} \cdot D + \beta X_1 \end{aligned}$$

$\{X_t\}$ が欠落すると, 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y_0|D) &= \alpha + \beta\,\mathrm{E}(X_0|D) \\ \mathrm{E}(Y_1|D) &= \alpha + \mathrm{ATE} \cdot D + \beta\,\mathrm{E}(X_1|D) \end{aligned}$$

$\Delta Y := Y_1 - Y_0$, $\Delta X := X_1 - X_0$ とする.

補題 1 (差分)**.** $d = 0, 1$ について

$$\mathrm{E}(\Delta Y|D=d) = \mathrm{ATE} \cdot d + \beta\,\mathrm{E}(\Delta X|D=d)$$

証明. $d = 0, 1$ について

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\Delta Y|D=d) &= \mathrm{E}(Y_1 - Y_0|D=d) \\ &= \mathrm{E}(Y_1|D=d) - \mathrm{E}(Y_0|D=d) \\ &= \alpha + \mathrm{ATE} \cdot d + \beta\,\mathrm{E}(X_1|D=d) \\ &\quad - (\alpha + \beta\,\mathrm{E}(X_0|D=d)) \\ &= \mathrm{ATE} \cdot d + \beta\,\mathrm{E}(\Delta X|D=d) \end{aligned}$$

□

定理 2 (差分の差分)**.**

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(\Delta Y|D=1) - \mathrm{E}(\Delta Y|D=0) \\ &= \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(\Delta X|D=1) - \mathrm{E}(\Delta X|D=0)) \end{aligned}$$

証明. 補題より明らか. □

系 1. $\mathrm{E}(\Delta X|D=1) = \mathrm{E}(\Delta X|D=0)$ なら

$$\mathrm{E}(\Delta Y|D=1) - \mathrm{E}(\Delta Y|D=0) = \mathrm{ATE}$$

定義 2. 共変量の変化の期待値が処置群と対照群で等しいという仮定を**平行トレンドの仮定**という.

注 3. すなわち $\mathrm{E}(\Delta X|D=1) = \mathrm{E}(\Delta X|D=0)$. $t = 0, 1$ について $\mathrm{E}(X_t|D=1) \neq \mathrm{E}(X_t|D=0)$ でも平行トレンドの仮定は成立し得る.

定義 3. 処置群と対照群の変化の差で ATE を推定する手法を**差分の差分**（*Difference in differences, DID*）**法**という.

定義 4. DID 法による ATE の推定量を *DID* **推定量**という.

定義 5. 偶然に生じた実験環境を**自然実験**という.

例 1. 自然災害・制度変更など.

注 4. 自然実験の処置群と対照群において, 共変量の変化が平均的に等しいと想定できるなら, DID 法で ATE を推定できる.

1.3 回帰モデル（p. 218）

(Y, D, T) を確率ベクトルとする. ただし T は観測時点（0 か 1）を表す. Y の (D, T, DT) 上への重回帰モデルは

$$\mathrm{E}(Y|D, T, DT) = \alpha + \beta D + \gamma T + \delta DT$$

定理 3.

$$\mathrm{E}(\Delta Y|D=1) - \mathrm{E}(\Delta Y|D=0) = \delta$$

証明. $d = 0, 1$ について

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\Delta Y|D=d) &= \mathrm{E}(Y_1 - Y_0|D=d) \\ &= \mathrm{E}(Y_1|D=d) - \mathrm{E}(Y_0|D=d) \\ &= \mathrm{E}(Y|D=d, T=1) \\ &\quad - \mathrm{E}(Y|D=d, T=0) \\ &= \alpha + \beta d + \gamma + \delta d - (\alpha + \beta d) \\ &= \gamma + \delta d \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\Delta Y|D=1) - \mathrm{E}(\Delta Y|D=0) &= \gamma + \delta - \gamma \\ &= \delta \end{aligned}$$

□

注 5. 2 時点の繰り返し横断面データを利用して，処置群ダミー・時点ダミーとその交差項で結果を説明する重回帰モデルを推定すれば，交差項の回帰係数の OLS 推定量= DID 推定量となる．

注 6. 観測できる共変量については共変量調整を併せて行う方がよい．

2 パネル・データ

2.1 個別効果（p. 221）

(Y, X, Z) を確率ベクトルする．Y の (X, Z) 上への重回帰モデルは

$$\mathrm{E}(Y|X, Z) = \alpha + \beta X + \gamma Z$$

Z が欠落すると，繰り返し期待値の法則より

$$\mathrm{E}(Y|X) = \alpha + \beta X + \gamma\,\mathrm{E}(Z|X)$$

したがって $\mathrm{cov}(X, Z) \neq 0$ なら β の OLS 推定量に偏りが生じる（欠落変数バイアス）．

定義 6. 個体に固有で観測を通じて一定の効果を**個別効果**という．

例 2. 能力，性格．

注 7. 観測できない個別効果は欠落変数バイアスをもたらす．

2.2 パネル・データ（p. 221）

(Y_t, X_t, Z) を時点 $t = 0, 1$ の確率ベクトルする．ただし Z は個別効果とする．Y_t の (X_t, Z) 上への重回帰モデルは

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha + \beta X_t + \gamma Z + U_t \\ \mathrm{E}(U_t|X_t, Z) &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta Y := Y_1 - Y_0$, $\Delta X := X_1 - X_0$, $\Delta U := U_1 - U_0$ とすると

$$\Delta Y = \beta \Delta X + \Delta U$$

すなわちパネル・データなら観測できない個別効果を消すことができる（1 階差分法）．

2.3 差分の回帰モデル（p. 223）

ΔY の ΔX 上への回帰モデルを得るには追加的な仮定が必要．

定義 7. $t = 0, 1$ について $\mathrm{E}(U_t|X_0, X_1) = 0$ なら $\{X_t\}$ は**強外生**という．

注 8. 繰り返し期待値の法則より $\mathrm{E}(U_t|X_0, X_1) = 0 \Longrightarrow \mathrm{E}(U_t|X_t) = 0$. 逆は必ずしも成立しない．

定理 4. $\{X_t\}$ が強外生なら

$$\mathrm{E}(\Delta U|\Delta X) = 0$$

証明. 繰り返し期待値の法則より

$$\mathrm{E}(\Delta U|\Delta X) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\Delta U|X_0, X_1)|\Delta X)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\Delta U|X_0, X_1) &= \mathrm{E}(U_1 - U_0|X_0, X_1) \\ &= \mathrm{E}(U_1|X_0, X_1) - \mathrm{E}(U_0|X_0, X_1) \end{aligned}$$

$\{X_t\}$ は強外生なので 2 項とも 0. □

3 固定効果と変量効果

3.1 固定効果モデル（p. 232）

$\{(y_{i,1}, x_{i,1}), \dots, (y_{i,T}, x_{i,T})\}$ を大きさ n の 2 変量 T 期間パネル・データとする．$i = 1, \dots, n$ について $\boldsymbol{x}_i := (x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$ とする．各変量の時間方向の平均は

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &:= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_{i,t} \\ \bar{x}_i &:= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_{i,t} \end{aligned}$$

定義 8. 非確率的な個別効果を**固定効果**という．

定義 9. $(y_{i,1}, \dots, y_{i,T})$ の $\boldsymbol{x}_i$ 上への**固定効果モデル**は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_{i,1}|\boldsymbol{x}_i) &= \alpha_i + \beta x_{i,1} \\ &\vdots \\ \mathrm{E}(y_{i,T}|\boldsymbol{x}_i) &= \alpha_i + \beta x_{i,T} \end{aligned}$$

ただし α_i は個体 i の固定効果．

注 9. $d_{i,1}, \dots, d_{i,n}$ を個別ダミーとすると，固定効果モデルは $y_{i,t}$ の $(d_{i,1}, \dots, d_{i,n}, \boldsymbol{x}_i)$ 上への重回帰モデル．

補題 2. $i = 1, \ldots, n$ について

$$\mathrm{E}(\bar{y}_i|\boldsymbol{x}_i) = \alpha_i + \beta\bar{x}_i$$

証明. $i = 1, \ldots, n$ について

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\bar{y}_i|\boldsymbol{x}_i) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{i,t}|\boldsymbol{x}_i\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{E}(y_{i,t}|\boldsymbol{x}_i) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\alpha_i + \beta x_{i,t}) \\ &= \alpha_i + \beta\cdot\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{i,t} \\ &= \alpha_i + \beta\bar{x}_i\end{aligned}$$

□

定理 5. $i = 1, \ldots, n$ について

$$\begin{gathered}\mathrm{E}(y_{i,1} - \bar{y}_i|\boldsymbol{x}_i) = \beta(x_{i,1} - \bar{x}_i) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(y_{i,T} - \bar{y}_i|\boldsymbol{x}_i) = \beta(x_{i,T} - \bar{x}_i)\end{gathered}$$

証明. 補題より明らか. □

3.2 変量効果モデル（p. 232）

無作為抽出なら個別効果は確率変数.

定義 10. 確率的な個別効果を**変量効果**という.

定義 11. $(y_{i,1}, \ldots, y_{i,T})$ の $\boldsymbol{x}_i$ 上への**変量効果モデル**は

$$\begin{gathered}y_{i,1} = \alpha + \beta x_{i,1} + c_i + w_{i,1} \\ \vdots \\ y_{i,T} = \alpha + \beta x_{i,T} + c_i + w_{i,T}\end{gathered}$$

ただし c_i は個体 i の変量効果で

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(c_i|\boldsymbol{x}_i) &= 0 \\ \mathrm{var}(c_i|\boldsymbol{x}_i) &= \sigma_c^2 \\ \mathrm{E}(w_{i,t}|\boldsymbol{x}_i) &= 0, \quad t = 1, \ldots, T \\ \mathrm{var}(w_{i,t}|\boldsymbol{x}_i) &= \sigma_w^2, \quad t = 1, \ldots, T \\ \mathrm{cov}(c_i, w_{i,t}|\boldsymbol{x}_i) &= 0, \quad t = 1, \ldots, T\end{aligned}$$

注 10. $\mathrm{E}(c_i|\boldsymbol{x}_i) = 0$ より欠落変数バイアスは生じない. したがって変量効果モデルは OLS でも推定できる（ただし BLUE ではない）.

注 11. $\mathrm{E}(c_i|\boldsymbol{x}_i) \neq 0$ なら固定効果モデルを用いる.

3.3 Hausman 検定（p. 234）

$\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n$ を θ の推定量とする. ただし

- $\hat{\theta}_n$ は H_0 の下で漸近有効, H_1 の下で一致性なし
- $\tilde{\theta}_n$ は H_0, H_1 の下で一致性あり

このとき $\hat{\theta}_n - \tilde{\theta}_n$ は H_0 の下でのみ 0 に確率収束.

定義 12. *(Durbin–Wu–)Hausman* **検定統計量**は

$$D_n := \frac{\left(\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n\right)^2}{\hat{\mathrm{var}}\left(\tilde{\theta}_n\right) - \hat{\mathrm{var}}\left(\hat{\theta}_n\right)}$$

注 12. $\boldsymbol{\theta}$ がベクトルなら

$$D_n := \left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n\right)'\left(\hat{\mathrm{var}}\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n\right) - \hat{\mathrm{var}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\right)\right)^{-1}\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n\right)$$

定理 6. H_0 の下で

$$D_n \xrightarrow{d} \chi^2(k)$$

ただし k は $\boldsymbol{\theta}$ の次元.

証明. 省略（大学院レベル）. □

注 13. Hausman 検定は様々な状況に応用できる.

例 3 (固定効果と変量効果)**.** パネル・データの個別効果について次の検定問題を考える.

$$H_0 : \text{変量効果} \quad \text{vs} \quad H_1 : \text{固定効果}$$

正規分布を仮定すると

- 変量効果モデルの回帰係数の一般化最小 2 乗（GLS）推定量は H_0 の下で漸近有効, H_1 の下で一致性なし
- 固定効果モデルの回帰係数の OLS 推定量は H_0, H_1 の下で一致性あり

例 4 (説明変数と誤差項の相関)**.** 線形モデルの説明変数と誤差項の相関について次の検定問題を考

える.

$$H_0: \text{相関なし} \quad \text{vs} \quad H_1: \text{相関あり}$$

正規分布を仮定すると

- 係数の OLS 推定量は H_0 の下で漸近有効，H_1 の下で一致性なし
- 係数の IV 推定量は H_0, H_1 の下で一致性あり

4 今日のキーワード

自己選択, 平行トレンドの仮定, 差分の差分（DID）法，DID 推定量，自然実験，個別効果，強外生，固定効果，固定効果モデル，変量効果，変量効果モデル，Hausman 検定統計量

5 次回までの準備

提出 宿題 6
復習 教科書第 9 章，復習テスト 12
予習 教科書第 10 章