計量経済 I：中間テスト

村澤 康友

2026 年 6 月 9 日

注意： 3 問とも解答すること．図や数式を用いる場合は，グラフや記号の意味を明記すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと．<u>結果のみや思考過程が読み取れない解答は 0 点とする</u>．PC・スマホを含め，何を参照してもよいが，決して他の受験者と相談しないこと．

1. （20 点）以下で定義される統計学・計量経済学の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   (a) 因果関係のない相関
   (b) 確率分布の特性を表す定数
   (c) H_1 が真なのに H_0 を採択する誤り
   (d) 関心の対象外の説明変数
2. （30 点）通勤時間が長いと睡眠時間が短くなるか調べたい．ただし通勤時間のデータは (1)「15 分未満」(2)「15 分以上 30 分未満」(3)「30 分以上 45 分未満」(4)「45 分以上 60 分未満」(5)「60 分以上 90 分未満」(6)「90 分以上 120 分未満」(7)「120 分以上」の 7 つの選択肢からの回答なので，「15 分未満」を基準グループとし，睡眠時間（分）をダミー変数に回帰する分散分析を行った．回帰式の推定結果は次の通りであった．

$$\begin{aligned}\widehat{\text{sleep}} = \underset{(3.6970)}{431.548} - \underset{(3.8875)}{8.03503}\,\text{Dcommute\_15} - \underset{(3.9811)}{15.0167}\,\text{Dcommute\_30} - \underset{(4.2337)}{24.8093}\,\text{Dcommute\_45} \\ - \underset{(4.1618)}{37.5385}\,\text{Dcommute\_60} - \underset{(4.8109)}{43.0571}\,\text{Dcommute\_90} - \underset{(8.5299)}{68.1653}\,\text{Dcommute\_120}\end{aligned}$$

$$T = 3726 \quad \bar{R}^2 = 0.0778 \quad F(6, 3719) = 53.387 \quad \hat{\sigma} = 44.823$$

(丸括弧内は標準誤差)

古典的正規線形回帰モデルを仮定し，検定の有意水準を 5% として，以下の問いに答えなさい．

(a) 通勤時間が「15 分未満」の人の平均睡眠時間の点推定値は何分か？また通勤時間が「120 分以上」の人の平均睡眠時間の点推定値は何分か？できるだけ正確に答えなさい．

(b) 通勤時間が「15 分未満」の人に比べ，通勤時間が「15 分以上 30 分未満」の人の平均睡眠時間は短いと主張できるか？検定問題を定式化し，検定統計量の値を求め，その H_0 の下での分布を示し，検定の棄却域を明示した上で，検定結果を説明しなさい．

(c) 全体として通勤時間は睡眠時間に影響すると主張できるか？検定問題を定式化し，検定統計量の値を求め，その H_0 の下での分布を示し，検定の棄却域を明示した上で，検定結果を説明しなさい．

（次頁に続く）

3.（50 点）2 次元確率ベクトル (X, Y) は以下の同時分布をもつ．

$X \backslash Y$	0	1
0	1/4	1/4
1	1/3	1/6

この場合，Y の X 上への回帰直線の傾きは $\mathrm{E}(Y|X=1) - \mathrm{E}(Y|X=0)$ で与えられる．また一般に回帰係数は $\mathrm{cov}(X,Y)/\mathrm{var}(X)$ で求まる．この事実を念頭において，以下の問いに答えなさい．

（a）X の周辺分布を示し，$\mathrm{E}(X)$ と $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい．

（b）Y の周辺分布を示し，$\mathrm{E}(Y)$ と $\mathrm{var}(Y)$ を求めなさい．

（c）$X = 0, 1$ のときの Y の条件付き分布を示し，$\mathrm{E}(Y|X=0)$ と $\mathrm{E}(Y|X=1)$ を求めなさい．

（d）XY の分布を示し，$\mathrm{E}(XY)$ を求めなさい．

（e）$\mathrm{cov}(X,Y)$ を求め，$\mathrm{E}(Y|X=1) - \mathrm{E}(Y|X=0)$ と $\mathrm{cov}(X,Y)/\mathrm{var}(X)$ を比較しなさい．

解答例

1. 統計学・計量経済学の基本用語
   (a) 見かけ上の（見せかけの，疑似）相関
      - 「偽相関」も可.
   (b) 母数（パラメーター）
   (c) 第 2 種の誤り
      - 「β エラー」も可.
      - 「第 II 種」はよいが,「第 11 種」と区別できなければ 1 点.
   (d) 共変量（統制変数，制御変数，コントロール変数）
      - 「共変数」は 1 点減.
2. 回帰（分散）分析の例
   (a) 通勤時間が「15 分未満」の人の平均睡眠時間の点推定値は 431.548 分,「120 分以上」の人の平均睡眠時間の点推定値は $431.548 - 68.1653 = 363.3827$ 分.
      - 各 5 点.
   (b) Dcommute_15 の回帰係数を β_1 とすると，検定問題は

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 < 0$$

   検定統計量の値（t 値）は

$$\frac{8.03503}{3.8875} \approx -2.067$$

   H_0 の下での t 統計量の分布は t(3719)．有意水準 5% の片側 t 検定の棄却域は $(-\infty, -1.645]$．t 値が棄却域に入るので H_0 は棄却される．したがって通勤時間が「15 分未満」の人に比べ，通勤時間が「15 分以上 30 分未満」の人の平均睡眠時間は短いと主張できる.
      - 検定問題，t 値，H_0 の下での分布，棄却域，検定結果各 2 点.
      - 両側検定問題は 1 点.
      - t(3719) を N(0, 1) としたら 1 点.
   (c) Dcommute_15, . . . , Dcommute_120 の回帰係数を $\beta_1, \dots, \beta_6$ とすると，検定問題は

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1 : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

   検定統計量の値（F 値）は 53.387．H_0 の下での F 統計量の分布は F(6, 3719)．有意水準 5% の F 検定の棄却域は $[2.10102, \infty)$．F 値が棄却域に入るので H_0 は棄却される．したがって全体として通勤時間は睡眠時間に影響すると主張できる.
      - 検定問題，F 値，H_0 の下での分布，棄却域，検定結果各 2 点.
3. 回帰係数
   (a) X の周辺分布は

$$X = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

期待値の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &:= 1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

分散の計算公式より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}(X)^2\\ &= \mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(X)^2\\ &= \mathrm{E}(X)(1-\mathrm{E}(X))\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- 期待値・分散各 5 点.
- 結果のみは 0 点．以下同様.

（b）Y の周辺分布は

$$Y=\begin{cases}1 & \text{with pr. } 5/12\\ 0 & \text{with pr. } 7/12\end{cases}$$

期待値の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &:= 1\cdot\frac{5}{12}+0\cdot\frac{7}{12}\\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

分散の計算公式より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right)-\mathrm{E}(Y)^2\\ &= \mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(Y)^2\\ &= \mathrm{E}(Y)(1-\mathrm{E}(Y))\\ &= \frac{5}{12}\left(1-\frac{5}{12}\right)\\ &= \frac{35}{144}\end{aligned}$$

- 期待値・分散各 5 点.

（c）$X=0$ のときの Y の条件付き分布は

$$Y|X=0=\begin{cases}1 & \text{with pr. } 1/2\\ 0 & \text{with pr. } 1/2\end{cases}$$

条件付き期待値の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X=0) &:= 1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$X=1$ のときの Y の条件付き分布は

$$Y|X=1=\begin{cases}1 & \text{with pr. } 1/3\\ 0 & \text{with pr. } 2/3\end{cases}$$

条件付き期待値の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X=1) &:= 1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{2}{3}\\ &=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

- 各 5 点.

(d) XY の分布は

$$XY=\begin{cases}1 & \text{with pr. } 1/6\\ 0 & \text{with pr. } 5/6\end{cases}$$

期待値の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &:= 1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{5}{6}\\ &=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

- 分布・期待値各 5 点.

(e) 共分散の計算公式より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)\\ &=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}\\ &=-\frac{1}{24}\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X=1)-\mathrm{E}(Y|X=0) &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}\\ &=-\frac{1}{6}\\ \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)} &= \frac{-1/24}{1/4}\\ &=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

- 各 5 点.