

## 計量経済 I：復習テスト 2

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

2024 年 4 月 16 日

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 を順に重ねて左上でホチキス止めし、中間テスト実施日（6 月 4 日の予定）に提出すること。

1. データを  $(x_1, \dots, x_n)$  とする。

(a)  $y_i := ax_i + b$  と一次変換すると、

$$\mu_y = a\mu_x + b$$

$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$

となることを示しなさい。ただし  $\mu_x, \mu_y$  は平均、 $\sigma_x^2, \sigma_y^2$  は分散を表す。

(b) 上の結果を利用して、 $z_i := (x_i - \mu_x)/\sigma_x$  と標準化すると、平均が 0、分散が 1 となることを示しなさい。

2. 1 変量データ  $(x_1, \dots, x_n)$  の平均を  $\mu$ , 分散を  $\sigma^2$  とする.

(a)  $\sigma^2$  の定義を式で書きなさい.

(b)  $\sigma^2$  が次のようにも書けることを示しなさい.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$$

3. 2 変量データ  $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$  の平均を  $\mu_x, \mu_y$ , 分散を  $\sigma_x^2, \sigma_y^2$ , 共分散を  $\sigma_{xy}$ , 相関係数を  $\rho_{xy}$  とする.

(a)  $\sigma_{xy}$  の定義を式で書きなさい.

(b)  $\sigma_{xy}$  が次のようにも書けることを示しなさい.

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y$$

(c)  $\rho_{xy}$  の定義を式で書きなさい.

(d)  $\rho_{xy}$  が次のように書けることを示しなさい.

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\mu_y &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n b \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ax_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b \\ &= a \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + b \\ &= a\mu_x + b \\ \sigma_y^2 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(ax_i + b) - (a\mu_x + b)]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [a(x_i - \mu_x)]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a^2(x_i - \mu_x)^2 \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 \\ &= a^2 \sigma_x^2\end{aligned}$$

(b)  $z_i := (x_i - \mu_x)/\sigma_x = (1/\sigma_x)x_i - \mu_x/\sigma_x$  と書けるから,  $a = 1/\sigma_x$ ,  $b = -\mu_x/\sigma_x$  と置くと,

$$\begin{aligned}\mu_z &= a\mu_x + b \\ &= \frac{1}{\sigma_x} \mu_x - \frac{\mu_x}{\sigma_x} \\ &= 0 \\ \sigma_z^2 &= a^2 \sigma_x^2 \\ &= \left( \frac{1}{\sigma_x} \right)^2 \sigma_x^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

2. (a)

$$\sigma^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

(b)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i\mu + \sum_{i=1}^n \mu^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2x_i\mu + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \mu^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2\end{aligned}$$

3. (a)

$$\sigma_{xy} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

(b)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \mu_y - \mu_x y_i + \mu_x \mu_y) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \mu_y - \sum_{i=1}^n \mu_x y_i + \sum_{i=1}^n \mu_x \mu_y \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \mu_y - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_x y_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_x \mu_y \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_y - \mu_x \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + \mu_x \mu_y \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y + \mu_x \mu_y \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \right) \left( \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \\ &= \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} \\ &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\end{aligned}$$