計量経済 I：復習テスト 4

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 4 月 30 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1～8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，中間テスト実施日（6 月 4 日の予定）に提出すること．

1. (X, Y) を確率ベクトルとする．以下の公式を示しなさい．

(a) 線形変換の期待値（期待値の線形性）

$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)$$

(b) 線形変換の分散

$$\mathrm{var}(aX + bY) = a^2\,\mathrm{var}(X) + 2ab\,\mathrm{cov}(X, Y) + b^2\,\mathrm{var}(Y)$$

(c) 共分散の計算公式

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

2. (X, Y) を確率ベクトルとする．以下の命題を証明しなさい．

（a）繰り返し期待値の法則

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) = \mathrm{E}(X)$$

（b）

$$\mathrm{E}(X|Y) = 0 \Longrightarrow \mathrm{E}(XY) = 0$$

（c）

$$\mathrm{E}(X|Y) = 0 \Longrightarrow \mathrm{cov}(X, Y) = 0$$

3. X と Y は独立とする．このとき以下の式が成り立つことを示しなさい．

（a）

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

（b）

$$\mathrm{cov}(X, Y) = 0$$

（c）

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$$

解答例

1. （a）(X,Y) が離散なら

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX+bY) &:= \sum_x \sum_y (ax+by) p_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_x \sum_y (ax p_{X,Y}(x,y) + by p_{X,Y}(x,y)) \\
&= \sum_x \sum_y ax p_{X,Y}(x,y) + \sum_x \sum_y by p_{X,Y}(x,y) \\
&= a \sum_x \sum_y x p_{X,Y}(x,y) + b \sum_x \sum_y y p_{X,Y}(x,y) \\
&= a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

(X,Y) が連続なら

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX+bY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax+by) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax f_{X,Y}(x,y) + by f_{X,Y}(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ax f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} by f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

※離散・連続のどちらか一方でよい.

（b）期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(aX+bY) &:= \mathrm{E}\left((aX+bY-\mathrm{E}(aX+bY))^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left([aX+bY-(a\,\mathrm{E}(X)+b\,\mathrm{E}(Y))]^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left([a(X-\mathrm{E}(X))+b(Y-\mathrm{E}(Y))]^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(a^2(X-\mathrm{E}(X))^2 + 2ab(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)) + b^2(Y-\mathrm{E}(Y))^2\right) \\
&= a^2\,\mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right) + 2ab\,\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))) + b^2\,\mathrm{E}\left((Y-\mathrm{E}(Y))^2\right) \\
&= a^2\,\mathrm{var}(X) + 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y) + b^2\,\mathrm{var}(Y)
\end{aligned}$$

（c）期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &:= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))) \\
&= \mathrm{E}(XY - X\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)Y + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)) \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

※ $\mu_X := \mathrm{E}(X)$, $\mu_Y := \mathrm{E}(Y)$ として計算すると分かりやすい.

2.（a）条件付き期待値と条件付き分布の定義より，(X, Y) が離散なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) &:= \sum_y \left(\sum_x x p_{X|Y}(x|y)\right) p_Y(y) \\ &= \sum_y \sum_x x \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} p_Y(y) \\ &= \sum_x \sum_y x p_{X,Y}(x,y) \\ &= \mathrm{E}(X)\end{aligned}$$

(X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x\right) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{E}(X)\end{aligned}$$

※離散・連続のどちらか一方でよい．

（b）繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(XY|Y)) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

（c）共分散の計算公式より

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

前問より第 1 項は 0．繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) \\ &= 0\end{aligned}$$

したがって第 2 項も 0．

3.（a）独立性の定義より，(X, Y) が離散なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &:= \sum_x \sum_y xy p_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_x \sum_y xy p_X(x) p_Y(y) \\ &= \sum_x x p_X(x) \sum_y y p_Y(y) \\ &= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

(X, Y) が連続なら

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x \right) y f_Y(y) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \, \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(X) \, \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}
$$

※離散・連続のどちらか一方でよい.

（b）共分散の計算公式と前問の結果より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \, \mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X) \, \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X) \, \mathrm{E}(Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（c）線形変換の分散の公式と前問の結果より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X + Y) &= \operatorname{var}(X) + 2 \operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{var}(Y) \\
&= \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)
\end{aligned}
$$