計量経済 I：復習テスト 6

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 5 月 14 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，中間テスト実施日（6 月 4 日の予定）に提出すること．

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ とする．y_i の x_i 上への単回帰モデルは

$$\mathrm{E}(y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i$$

回帰の誤差項は $u_i := y_i - \mathrm{E}(y_i|x_i)$．以下の式を証明しなさい．

(a)

$$\mathrm{E}(u_i|x_i) = 0$$

(b)

$$\mathrm{E}(u_i) = 0$$

(c)

$$\mathrm{E}(x_i u_i) = 0$$

(d)

$$\mathrm{cov}(x_i, u_i) = 0$$

(e)

$$\mathrm{cov}(x_i, y_i) = \beta \,\mathrm{var}(x_i)$$

2. $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ の標本平均を $(\bar{y}, \bar{x})$ とする．次の OLS 問題を考える．

$$\begin{aligned} \min_{a,b} \quad & \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \\ \text{and} \quad & a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

OLS 問題の解を (a^*, b^*)，回帰予測を $\hat{y}_i := a^* + b^* x_i$，回帰残差を $e_i := y_i - \hat{y}_i$ とする．

(a) 総変動（TSS），回帰変動（ESS），残差変動（RSS）をそれぞれ定義しなさい．

(b) 以下の式を証明しなさい．

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

(c) $\bar{y} = a^* + b^* \bar{x}$ が成り立つことを示しなさい．

(d) $\mathrm{TSS} = \mathrm{ESS} + \mathrm{RSS}$ が成り立つことを示しなさい．

解答例

1.（a）期待値の線形性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(u_i|x_i) &= \mathrm{E}(y_i - \mathrm{E}(y_i|x_i)|x_i) \\
&= \mathrm{E}(y_i|x_i) - \mathrm{E}(y_i|x_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（b）繰り返し期待値の法則と前問より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(u_i|x_i)) \\
&= \mathrm{E}(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（c）繰り返し期待値の法則と前々問より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(x_i u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_i u_i|x_i)) \\
&= \mathrm{E}(x_i \mathrm{E}(u_i|x_i)) \\
&= \mathrm{E}(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（d）共分散の計算公式と前 2 問より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(x_i, u_i) &= \mathrm{E}(x_i u_i) - \mathrm{E}(x_i)\mathrm{E}(u_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（e）$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(x_i, y_i) &= \operatorname{cov}(x_i, \alpha + \beta x_i + u_i) \\
&= \operatorname{cov}(x_i, \alpha) + \operatorname{cov}(x_i, \beta x_i) + \operatorname{cov}(x_i, u_i)
\end{aligned}
$$

α は定数なので第 1 項は 0．前問より第 3 項は 0．したがって

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(x_i, y_i) &= \operatorname{cov}(x_i, \beta x_i) \\
&= \beta \operatorname{cov}(x_i, x_i) \\
&= \beta \operatorname{var}(x_i)
\end{aligned}
$$

2.（a）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TSS} &:= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \\
\mathrm{ESS} &:= \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \\
\mathrm{RSS} &:= \sum_{i=1}^{n} e_i^2
\end{aligned}
$$

（b）OLS 問題の 1 階の条件より

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a^* - b^* x_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a^* - b^* x_i) = 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

（c）前問より

$$\begin{aligned}
\bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i + e_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^* + b^* x_i + e_i) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a^* + \sum_{i=1}^{n} b^* x_i + \sum_{i=1}^{n} e_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(n a^* + b^* \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= a^* + b^* \bar{x}
\end{aligned}$$

（d）総変動は

$$\begin{aligned}
\mathrm{TSS} := \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i + e_i - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(\hat{y}_i - \bar{y}) + e_i]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2(\hat{y}_i - \bar{y})e_i + e_i^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})e_i + \sum_{i=1}^{n} e_i^2
\end{aligned}$$

第 1 項は ESS. 第 3 項は RSS. 前 2 問より第 2 項は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})e_i &= \sum_{i=1}^{n}[(a^* + b^* x_i) - (a^* + b^* \bar{x})]e_i \\ &= b^* \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})e_i \\ &= b^* \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - b^* \bar{x} \sum_{i=1}^{n} e_i \\ &= 0\end{aligned}$$