計量経済 I：復習テスト 13

学籍番号____________________ 氏名____________________

2024 年 7 月 9 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を左上でホチキス止めし，定期試験実施日（7 月 23 日の予定）にまとめて提出すること．

1. (Y, X, Z) を確率ベクトルとする．以下を示しなさい．

   (a) X と Y は独立 $\Longrightarrow \mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y)$

   (b) $\mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y) \Longrightarrow \mathrm{cov}(X, Y) = 0$

   (c) Z を所与として X と Y は条件付き独立 $\Longrightarrow \mathrm{E}(Y|X, Z) = \mathrm{E}(Y|Z)$

2. 処置ダミーを D，処置あり／なしの潜在的な結果を Y_1^*, Y_0^* とし，共変量を X，傾向スコアを $p(X) :=$ $\Pr[D=1|X]$ とする．X を所与として (Y_1^*, Y_0^*) と D が条件付き独立なら，$p(X)$ を所与としても両者は条件付き独立であることを示したい．すなわち

$$\Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \Pr[D=1|X] \Longrightarrow \Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \Pr[D=1|p(X)]$$

以下を示しなさい（ヒント：繰り返し期待値の法則）．

(a)

$$\Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = p(X)$$

(b)

$$\Pr[D=1|p(X)] = p(X)$$

(c)

$$\Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \Pr[D=1|p(X)]$$

解答例

1. (a) 独立性の定義より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y|X) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|X)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}
$$

(b) 共分散の計算公式と繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(XY|X)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(Y|X)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(Y)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c) 条件付き独立性の定義より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y|X, Z) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X,Z}(y|X, Z)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|Z}(y|Z)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(Y|Z)
\end{aligned}
$$

2. (a) 繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] &= \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X)|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X]|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\Pr[D = 1|X]|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\
&= \mathrm{E}(p(X)|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\
&= p(X)
\end{aligned}
$$

(b) 繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\Pr[D = 1|p(X)] &= \mathrm{E}(D|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(D|X)|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\Pr[D = 1|X]|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(p(X)|p(X)) \\
&= p(X)
\end{aligned}
$$

(c) 前 2 問より

$$
\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = p(X) = \Pr[D = 1|p(X)]
$$