

計量経済 I：復習テスト 14

学籍番号 _____ 氏名 _____

2024 年 7 月 16 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～14 を左上でホチキス止めし、定期試験実施日（7 月 23 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 処置ダミーを D ，処置あり／なしの潜在的な結果を Y_1^*, Y_0^* ，観測される結果を Y ，共変量を X とする。 $d = 0, 1$ について $E(Y_d^*|X) = r_d(X)$ とする。処置確率を $p(X) := \Pr[D = 1|X]$ とする。
 - (a) $X = x$ のときの条件付き ATE を $r_0(\cdot), r_1(\cdot)$ で表しなさい。

- (b) X を所与として Y_1^*, Y_0^* は D と条件付き平均独立とする。 $E(Y|X)$ を $r_0(\cdot), r_1(\cdot), p(\cdot)$ で表しなさい。

2. 前問と同じ状況を考える. ただし $d = 0, 1$ について $E(Y_d^*|X) = \alpha_d + \beta_d X$ とする.

(a) 条件つき ATE を X の関数で表しなさい.

(b) $d = 0, 1$ について $U_d := Y_d^* - E(Y_d^*|X)$ とする. Y を D, X, U_0, U_1 で表しなさい.

(c) $\beta_0 = \beta_1 = \beta$, $U_0 = U_1 = U$ とする. Y を D, X, U で表しなさい.

(d) X を所与として Y_0^* は D と条件付き平均独立とする. $E(U|D, X) = 0$ を示しなさい.

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned} \text{ATE}(x) &:= \mathbf{E}(Y_1^* - Y_0^* | X = x) \\ &= \mathbf{E}(Y_1^* | X = x) - \mathbf{E}(Y_0^* | X = x) \\ &= r_1(x) - r_0(x) \end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則と条件付き平均独立性より

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y|X) &= \mathbf{E}(DY_1^* + (1 - D)Y_0^* | X) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(DY_1^* + (1 - D)Y_0^* | D, X) | X) \\ &= \mathbf{E}(D \mathbf{E}(Y_1^* | D, X) + (1 - D) \mathbf{E}(Y_0^* | D, X) | X) \\ &= \mathbf{E}(D \mathbf{E}(Y_1^* | X) + (1 - D) \mathbf{E}(Y_0^* | X) | X) \\ &= \mathbf{E}(D | X) \mathbf{E}(Y_1^* | X) + (1 - \mathbf{E}(D | X)) \mathbf{E}(Y_0^* | X) \\ &= \Pr[D = 1 | X] r_1(X) + (1 - \Pr[D = 1 | X]) r_0(X) \\ &= p(X) r_1(X) + (1 - p(X)) r_0(X) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} \text{ATE}(X) &:= \mathbf{E}(Y_1^* - Y_0^* | X) \\ &= \mathbf{E}(Y_1^* | X) - \mathbf{E}(Y_0^* | X) \\ &= \alpha_1 + \beta_1 X - (\alpha_0 + \beta_0 X) \\ &= \alpha_1 - \alpha_0 + (\beta_1 - \beta_0) X \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Y &:= DY_1^* + (1 - D)Y_0^* \\ &= Y_0^* + D(Y_1^* - Y_0^*) \\ &= \alpha_0 + \beta_0 X + U_0 + D[\alpha_1 + \beta_1 X + U_1 - (\alpha_0 + \beta_0 X + U_0)] \\ &= \alpha_0 + \beta_0 X + U_0 + D[(\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0) X + U_1 - U_0] \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) D + \beta_0 X + (\beta_1 - \beta_0) D X + U_0 + D(U_1 - U_0) \end{aligned}$$

(c) 前問より

$$Y = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) D + \beta_0 X + U$$

(d) 条件付き平均独立性より

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(U | D, X) &= \mathbf{E}(Y_0^* - \mathbf{E}(Y_0^* | X) | D, X) \\ &= \mathbf{E}(Y_0^* | D, X) - \mathbf{E}(Y_0^* | X) \\ &= \mathbf{E}(Y_0^* | X) - \mathbf{E}(Y_0^* | X) \\ &= 0 \end{aligned}$$