計量分析 2：中間試験

村澤 康友

2023 年 11 月 28 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 累積分布関数 (b) χ^2 分布 (c) 統計的推測 (d) （X に対する Y の）弾力性
2. （50 点）2 変量データ $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ の標本平均を $(\bar{y}, \bar{x})$ とする．y_i の x_i 上への単回帰モデルは
   $$\mathrm{E}(y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i$$
   (α, β) の MM 推定量を (a, b)，回帰予測を $\hat{y}_i := a + bx_i$，回帰残差を $e_i := y_i - \hat{y}_i$ とする．
   (a) (α, β) が $\mathrm{E}(y_i - \alpha - \beta x_i) = 0$ と $\mathrm{E}(x_i(y_i - \alpha - \beta x_i)) = 0$ を満たすことを示しなさい．
   (b) (a, b) を与える連立方程式を導きなさい．
   (c) $\{e_i\}$ が $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ と $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$ を満たすことを示しなさい．
   (d) $\bar{y} = a + b\bar{x}$ が成り立つことを示しなさい．
   (e) 総変動（TSS）・回帰変動（ESS）・残差変動（RSS）について $\mathrm{TSS} = \mathrm{ESS} + \mathrm{RSS}$ が成り立つことを示しなさい．
3. （30 点）親の教育水準が子供の修学年数に与える影響を推定したい．そこで父親の学歴（大卒ダミー pacograd）と母親の学歴（大卒ダミー mocograd）で子供の修学年数（yeduc）を説明する回帰分析を行った．分析結果のコンピューター出力は以下の通りであった．

	係数	標準誤差	t 値	p 値
const	13.5946	0.0235193	578.0	0.0000
pacograd	1.10886	0.0475107	23.34	5.64e-113
mocograd	0.497015	0.0762982	6.514	8.23e-011

R-squared	0.176201	Adjusted R-squared	0.175784
F(2, 3951)	422.5373	P-value(F)	5.1e-167

   以下の問に答えなさい．ただし検定の有意水準は 5 %とする．
   (a) 大卒の父親と高卒の母親をもつ子供の平均修学年数の推定値は何年か？
   (b) 父親の教育水準が子供の修学年数に与える影響の有無の t 検定の結果を，関連する数値を参照して説明しなさい．
   (c) 親の教育水準が子供の修学年数に与える影響の有無の F 検定の結果を，関連する数値を参照して説明しなさい．

解答例

1. 計量経済学の基本用語
   (a) 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数
      - 「確率を累積した関数」は連続分布だと定義できないので不可.
   (b) $Z_1, \dots, Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ が独立のときの $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ の分布
   (c) 統計量の標本分布から母数について推測すること
   (d) X の 1 %の増加に対する Y の変化率
2. 単回帰モデルの MM 推定
   (a) 繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_i - \alpha - \beta x_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(y_i - \alpha - \beta x_i | x_i)) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(y_i | x_i) - \alpha - \beta x_i) \\
&= \mathrm{E}(\alpha + \beta x_i - \alpha - \beta x_i) \\
&= 0 \\
\mathrm{E}(x_i(y_i - \alpha - \beta x_i)) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_i(y_i - \alpha - \beta x_i) | x_i)) \\
&= \mathrm{E}(x_i(\mathrm{E}(y_i | x_i) - \alpha - \beta x_i)) \\
&= \mathrm{E}(x_i(\alpha + \beta x_i - \alpha - \beta x_i)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

      - 各 5 点.
      - 「繰り返し期待値の法則」を明記しなければ 0 点.
   (b) 前問の式の期待値を標本平均で置き換えた連立方程式が (a, b) を与えるので

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i) &= 0 \\
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a - b x_i) &= 0
\end{aligned}
$$

      - 各 5 点.
      - (a, b) に関する方程式でなければ 0 点.
   (c) 前問より

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \hat{y}_i) &= 0
\end{aligned}
$$

   すなわち

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} e_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i e_i &= 0
\end{aligned}
$$

      - 各 5 点.

- 前問が不正解なら 0 点.

（d）前問より

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i + e_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i + e_i) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} bx_i + \sum_{i=1}^{n} e_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(na + b\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= a + b\bar{x}
\end{aligned}
$$

（e）総変動（TSS），回帰変動（ESS），残差変動（RSS）は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TSS} &:= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \\
\mathrm{ESS} &:= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 \\
\mathrm{RSS} &:= \sum_{i=1}^{n} e_i^2
\end{aligned}
$$

総変動は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TSS} &:= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i + e_i - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(\hat{y}_i - \bar{y}) + e_i]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2(\hat{y}_i - \bar{y})e_i + e_i^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})e_i + \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\
&= \mathrm{ESS} + 2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})e_i + \mathrm{RSS}
\end{aligned}
$$

前 2 問より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})e_i &= \sum_{i=1}^{n}[(a+bx_i)-(a+b\bar{x})]e_i \\ &= b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})e_i \\ &= b\sum_{i=1}^{n}x_ie_i - b\bar{x}\sum_{i=1}^{n}e_i \\ &= 0\end{aligned}$$

- TSS・ESS・RSS の定義で各 1 点.

3. 重回帰分析
   (a) $13.5946 + 1.10886 = 14.70346$ 年.
   (b) t 値は 23.34, p 値は 5.64e-113（ほぼ 0）なので，帰無仮説は棄却される．すなわち父親の教育水準が子供の修学年数に影響を与える．
      - t 値・p 値のみは 0 点.
   (c) F 値は 422.5373, p 値は 5.1e-167（ほぼ 0）なので，帰無仮説は棄却される．すなわち親の教育水準が子供の修学年数に影響を与える．
      - F 値・p 値のみは 0 点.