計量経済 II：定期試験

村澤 康友

2023 年 1 月 24 日

注意： 3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下で定義される時系列分析の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   (a) 2 標本の 2 つの回帰モデルの係数ベクトルの差の F 検定
   (b) 階差がホワイト・ノイズとなる確率過程
   (c) 独立な I(1) 間の回帰係数の OLS 推定量が 0 に確率収束しない現象
   (d) $\mathrm{var}(Y|X)$ が X に依存すること
2. （50 点）$\{y_t\} \sim \mathrm{I}(1)$ は ARCH(1) のホワイト・ノイズをもつ．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \delta + w_t \\ w_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= c + \alpha w_{t-1}^2 \\ \{z_t\} &\sim \mathrm{IID}(0,1)\end{aligned}$$

   ただし $c > 0$，$\alpha \in [0,1)$．以下を求めなさい．
   (a) $\mathrm{E}_t(w_{t+1})$
   (b) $\mathrm{E}_t(y_{t+1})$
   (c) $\mathrm{var}_t(y_{t+1})$
   (d) $\mathrm{E}(\Delta y_t)$
   (e) $\mathrm{var}(\Delta y_t)$

3. （30 点）1960〜1982 年のアメリカのマクロの所得と消費の年次データの対数系列について Johansen の共和分検定を行い，以下の結果を得た．

```
Johansen 検定:
式の数 = 2
ラグ次数 = 4
推定期間: 1954 - 1985 (T = 32)
ケース 4: 制約つきのトレンド, 制約のない定数項
Log-likelihood = 300.587 (定数項を含む: 209.775)
ランク  固有値  トレース検定   p 値   最大固有値検定   p 値
   0     0.32004      15.979 [0.5022]      12.343 [0.3963]
   1     0.10740      3.6358 [0.7891]      3.6358 [0.7909]
標本のサイズに合わせて修正した検定 (df = 22)
ランク  トレース検定  p 値
   0      15.979 [0.5664]
   1      3.6358 [0.7982]
固有値       0.32004       0.10740
beta (cointegrating vectors)
l_Y             215.86      -89.665
l_C            -296.57       75.240
trend           2.6521      0.52767
alpha (adjustment vectors)
l_Y          0.0042314    0.0038349
l_C          0.0075257    0.0021369
renormalized beta
l_Y             1.0000      -1.1917
l_C            -1.3739       1.0000
trend         0.012286    0.0070132
renormalized alpha
l_Y            0.91339      0.28854
l_C             1.6245      0.16078
long-run matrix (alpha * beta')
                   l_Y          l_C        trend
l_Y            0.56954     -0.96638     0.013246
l_C             1.4329      -2.0711     0.021087
```

共和分階数を r とする．

(a) $H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r = 1$ の尤度比検定統計量の値を示し，検定結果を述べなさい．

(b) $H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r = 2$ の尤度比検定統計量の値を示し，検定結果を述べなさい．

(c) 1960〜1982 年のアメリカのマクロの所得と消費の対数系列について，Johansen の共和分検定から分かったことを説明しなさい．

解答例

1. 時系列分析の基本用語
   (a) チョウ検定
   (b) ランダム・ウォーク
   (c) 見せかけの回帰
   (d) 条件つき不均一分散
2. ARCH 過程の和分過程
   (a) 時点 t で σ_{t+1}^2 は既知であり，$\{z_t\}$ は $\mathrm{IID}(0,1)$ なので，任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t(w_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(\sigma_{t+1} z_{t+1}) \\ &= \sigma_{t+1}\,\mathrm{E}_t(z_{t+1}) \\ &= \sigma_{t+1}\,\mathrm{E}(z_{t+1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

   (b) 式変形すると，任意の t について

$$y_t = y_{t-1} + \delta + w_t$$

   前問より任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(y_t + \delta + w_{t+1}) \\ &= y_t + \delta + \mathrm{E}_t(w_{t+1}) \\ &= y_t + \delta\end{aligned}$$

   (c) 前々問より任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(y_t + \delta + w_{t+1}) \\ &= \mathrm{var}_t(w_{t+1}) \\ &= \mathrm{E}_t\left(w_{t+1}^2\right) \\ &= \mathrm{E}_t\left(\sigma_{t+1}^2 z_{t+1}^2\right) \\ &= \sigma_{t+1}^2\,\mathrm{E}_t\left(z_{t+1}^2\right) \\ &= \sigma_{t+1}^2\,\mathrm{E}\left(z_{t+1}^2\right) \\ &= \sigma_{t+1}^2\,\mathrm{var}(z_{t+1}) \\ &= \sigma_{t+1}^2 \\ &= c + \alpha w_t^2\end{aligned}$$

   (d) 前々々問と繰り返し期待値の法則より，任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\Delta y_t) &= \mathrm{E}(\delta + w_t) \\ &= \delta + \mathrm{E}(w_t) \\ &= \delta + \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}(w_t)) \\ &= \delta\end{aligned}$$

（e）前問と繰り返し期待値の法則より，任意の t について

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(\Delta y_t) &= \operatorname{var}(\delta + w_t) \\
&= \operatorname{var}(w_t) \\
&= \mathrm{E}\left(w_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2 z_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}_{t-1}\left(\sigma_t^2 z_t^2\right)\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\,\mathrm{E}_{t-1}\left(z_t^2\right)\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\,\mathrm{E}\left(z_t^2\right)\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2 \operatorname{var}(z_t)\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(c + \alpha w_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha\,\mathrm{E}\left(w_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha \operatorname{var}(w_{t-1}) \\
&= c + \alpha \operatorname{var}(w_t) \\
&= c + \alpha \operatorname{var}(\Delta y_t) \\
&= \frac{c}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

3. Johansen の共和分検定

（a）最大固有値検定統計量＝ 12.343．p 値＝ 0.3963 ＞ 0.05 より $H_0 : r = 0$ は棄却されない．

（b）トレース検定統計量＝ 15.979．p 値＝ 0.5022 ＞ 0.05 より $H_0 : r = 0$ は棄却されない．

（c）$H_0 : r = 0$ が棄却されないので共和分階数は 0．すなわち 1960〜1982 年のアメリカのマクロの所得と消費の年次の対数系列について，共和分関係は認められない．