第 1 回　確率過程と時系列（2.1.3, 3.1.1, 7.1.3）

村澤 康友

2023 年 9 月 25 日

今日のポイント

1. 試行の結果によって値が決まる数列を確率変数列（離散確率過程）という．確率変数列の実現値を時系列という．
2. 必要なら時系列を対数系列，差分（階差）系列，対数差分（階差）系列に変換する．対数差分は変化率と近似的に等しい．
3. 時系列 $(y_1,\dots,y_T)$ から推定した回帰式 $\mathrm{E}(Y_t|Y_{t-1})$ は，一定の条件の下で Y_{T+1} の予測に使える．

目次

1　確率過程

1.1　確率

定義 1. 結果が偶然に支配される実験を**試行**という．

定義 2. 試行において起こりうる結果を**標本点**という．

定義 3. 標本点全体の集合を**標本空間**という．

注 1. 標本点を ω, 標本空間を Ω で表すことが多い．

定義 4. 標本空間の部分集合を**事象**という．

定義 5. 事象に対して定義され，以下の公理を満たす関数 $P(.)$ を**確率**という．

1. $0 \le P(.) \le 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. （σ 加法性）$A_1, A_2, \dots$ が排反なら

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

1.2　確率変数（p. 38）

定義 6. 試行の結果によって値が決まる変数を**確率変数**という．

注 2. すなわち $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

例 1. サイコロの目．

1.3　確率ベクトル

定義 7. 試行の結果によって値が決まるベクトルを**確率ベクトル**という．

注 3. すなわち $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

例 2. n 個（または n 回）振るサイコロの目．

1.4　確率変数列

定義 8. 試行の結果によって値が決まる数列を**確率変数列（離散確率過程）**という．

注 4. すなわち $\{X_t\} : \Omega \to \mathbb{R}^\infty$．確率変数・確率ベクトルと同様に，起こりうる結果に対して確率を定義できる．

例 3. 無限回振るサイコロの目．

2　時系列

2.1　時系列（p. 208）

確率変数列 $\{X_t\}$ の実現値 $\{x_t\}$ のうち，実際に観測される部分を $(x_1, \dots, x_T)$ とする．

定義 9. 確率変数列の実現値を**時系列**という．

例 4. サイコロを T 回振った結果．

定義 10. 時系列の観測値の数を時系列の**長さ**という．

注 5. 時系列の長さ≠標本の大きさ．1 度しか観測されない時系列の標本の大きさは 1．したがって $(x_1, \dots, x_T)$ は（長さ T の時系列の）大きさ 1 の標本．

例 5. サイコロを T 回振る実験を n 回繰り返した結果は（長さ T の時系列の）大きさ n の標本．

2.2　時系列の変換（p. 214）

必要なら分析の前に時系列を変換する．

定義 11. $\{x_t\}$ の**対数系列**は $\{\ln x_t\}$．

注 6. 自然対数で変換する．

注 7. $x_t > 0$ でないと変換できない．

例 6. 株価指数（NYSE 総合指数）の原系列と対数系列（図 1）．

定義 12. $\{x_t\}$ の**差分（階差）系列**は $\{\Delta x_t\}$．

注 8. Δ は（後退）差分演算子．すなわち $\Delta x_t := x_t - x_{t-1}$．

定義 13. $\{x_t\}$ の**変化（成長）率系列**は $\{\Delta x_t / x_{t-1}\}$．

注 9. 時系列分析ではあまり使われない．

定義 14. $\{x_t\}$ の**対数差分（階差）系列**は $\{\Delta \ln x_t\}$．

注 10. 時系列分析では変化率の代わりによく使われる．

例 7. 株価指数（NYSE 総合指数）の差分系列と対数差分系列（図 2）．

補題 1. $x = 0$ の近傍において

$$\ln(1+x) \approx x$$

証明. マクローリン展開より

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

したがって $x = 0$ の近傍において

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x$$

両辺を対数変換すると

$$x \approx \ln(1+x)$$

□

定理 1.

$$\Delta \ln x_t \approx \frac{\Delta x_t}{x_{t-1}}$$

証明. 補題より

$$\begin{aligned}
\Delta \ln x_t &:= \ln x_t - \ln x_{t-1} \\
&= \ln \frac{x_t}{x_{t-1}} \\
&= \ln \left(1 + \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}\right) \\
&\approx \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}
\end{aligned}$$

□

注 11. 対数差分は正と負が対称．変化率は正と負が非対称．

例 8. $x_1 := 1$ すなわち $\ln x_1 = 0$ とする．

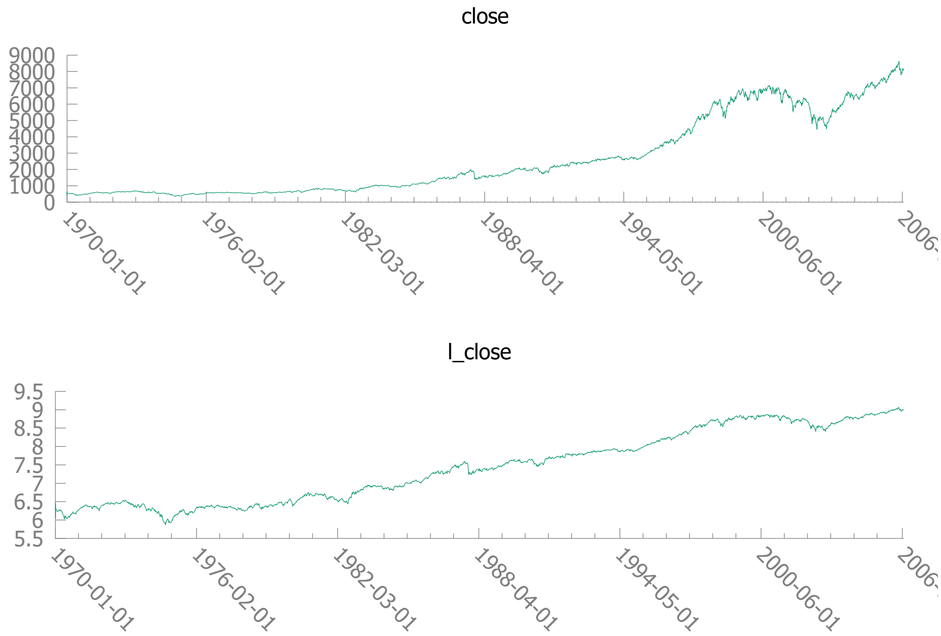

図 1　NYSE 総合指数（週次）の原系列と対数系列

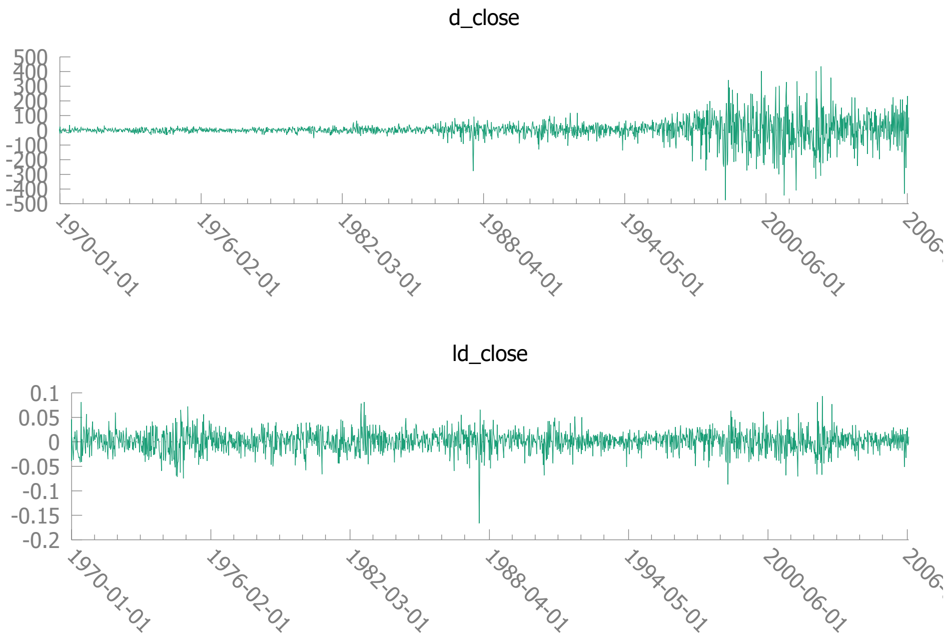

図 2　NYSE 総合指数（週次）の差分系列と対数差分系列

1. $\Delta \ln x_2 := 1$，$\Delta \ln x_3 := -1$ なら $\ln x_3 = 0$ より $x_3 = 1 = x_1$.
2. $\Delta x_2/x_1 = 1$，$\Delta x_3/x_2 = -1$ なら 100 %増の 100 %減だから $x_3 = 0 \neq x_1$.

3 時系列予測

3.1 同時分布と周辺分布

(X, Y) を確率ベクトルとする．

定義 15. (X, Y) の**同時（結合）累積分布関数**（*cumulative distribution function, cdf*）は，任意の (x, y) について

$$F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$$

定義 16. X の**周辺** *cdf* は，任意の x について

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x]$$

定義 17. (X, Y) の**同時（結合）確率質量関数**（*probability mass function, pmf*）は，任意の (x, y) について

$$p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

定義 18. X の**周辺** *pmf* は，任意の x について

$$p_X(x) := \Pr[X = x]$$

注 12. 同時 pmf と周辺 pmf の関係は

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$

定義 19. 任意の (x, y) について

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$$

となる $f_{X,Y}(.,.)$ を (X, Y) の**同時（結合）確率密度関数**（*probability density function, pdf*）という．

注 13. $F_{X,Y}(.,.)$ が微分可能なら

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x, y)$$

定義 20. X の**周辺** *pdf* は，任意の x について

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}y$$

3.2 条件つき分布

定義 21. $X = x$ が与えられたときの Y の**条件つき** *pmf* は，任意の y について

$$p_{Y|X}(y|X = x) := \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}$$

注 14. 条件つき確率で定義する．

定義 22. $X = x$ が与えられたときの Y の**条件つき** *pdf* は，任意の y について

$$f_{Y|X}(y|X = x) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

注 15. 条件つき確率と同様に定義する．

定義 23. $X = x$ が与えられたときの Y の**条件つき期待値**は

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(Y|X = x) \\ &:= \begin{cases} \sum_y y p_{Y|X}(y|X = x) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|X = x) \, \mathrm{d}y & \text{（連続）} \end{cases} \end{aligned}$$

3.3 回帰（p. 68）

定義 24. $\mathrm{E}(Y|X)$ を求めることを，Y を X に**回帰する**という．

定義 25. $\mathrm{E}(Y|X)$ を与える式を，Y の X 上への**回帰モデル（回帰式，回帰関数）**という．

注 16. すなわち

$$\mathrm{E}(Y|X) = r(X)$$

定義 26. 線形な回帰モデルを**線形回帰モデル**という．

注 17. すなわち

$$\mathrm{E}(Y|X) = \alpha + \beta X$$

3.4 1 期先予測

確率変数列 $\{Y_t\}$ の実現値 $(y_1, \ldots, y_T)$ から Y_{T+1} を予測したい．Y_{T+1} の $(Y_1, \ldots, Y_T)$ 上への線形回帰モデルは

$$\mathrm{E}(Y_{T+1}|Y_1, \ldots, Y_T) = \alpha + \beta_1 Y_1 + \cdots + \beta_T Y_T$$

Y_{T+1} が観測されていないため，この式は推定できない．

$t=2,\dots,T$ について，Y_t の Y_{t-1} 上への単回帰モデルを仮定する．すなわち

$$\mathrm{E}(Y_t|Y_{t-1})=\alpha+\beta Y_{t-1}$$

この式は観測値 $(y_1,\dots,y_T)$ から推定できる．一定の条件の下で，この式を Y_{T+1} の予測に使うことができる．

4 今日のキーワード

試行，標本点，標本空間，事象，確率，確率変数，確率ベクトル，確率変数列（離散確率過程），時系列，（時系列の）長さ，対数系列，差分（階差）系列，変化（成長）率系列，対数差分（階差）系列，同時（結合）累積分布関数（cdf），周辺 cdf，同時（結合）確率質量関数（pmf），周辺 pmf，同時（結合）確率密度関数（pdf），周辺 pdf，条件つき pmf，条件つき pdf，条件つき期待値，回帰，回帰モデル（回帰式，回帰関数），線形回帰モデル

5 次回までの準備

提出 宿題 1

復習 教科書第 2 章 1.3 節，第 3 章 1.1 節，第 7 章 1.3 節，復習テスト 1

予習 教科書第 7 章 1.1–1.2 節，第 4 章 3 節