第 2 回　季節性・トレンド・構造変化（4.3, 7.1.1–7.1.2）

村澤 康友

2023 年 10 月 2 日

今日のポイント

1. 時系列から特定の成分を取り出す（取り除く）手法をフィルターという．
2. 時系列における季節特有の変動を季節性（季節変動）という．時系列から季節性を取り除くことを季節調整という．季節ダミー・季節階差・その他の様々な季節調整法がある．
3. 時系列の長期的な傾向をトレンドという．時点 t の n 次多項式で表すトレンドを n 次トレンドという．時系列を滑らかにしてトレンドを求めることを平滑化という．移動平均など様々な平滑化法がある．
4. 時系列（確率過程）の特性の予期せぬ変化を構造変化という．構造変化ダミーで構造変化を調整する．

目次

1　フィルター（p. 209）

必要なら時系列 $\{y_t\}$ を季節特有の変動 $\{S_t\}$，長期的な傾向 $\{T_t\}$，短期的な循環変動 $\{C_t\}$，不規則変動 $\{E_t\}$ に分解する．すなわち

$$y_t = S_t + T_t + C_t + E_t$$

$\{T_t\}$ は長期予測，$\{C_t\}$ は短期予測に役立つ．

定義 1. 時系列から特定の成分を取り出す（取り除く）手法を**フィルター**という．

2　季節性

2.1　季節調整（p. 209）

日本の月次の所得は 6 月と 12 月が多いなど，月次・四半期系列は季節特有の変動を含む．

定義 2. 時系列における季節特有の変動を**季節性（季節変動）**という．

定義 3. 時系列から季節性を取り除くことを**季節調整**という．

注 1. アメリカ国勢調査局による X-12-ARIMA, X-13-ARIMA-SEATS など様々な季節調整法がある．季節性に関心がない場合，時系列を季節調整してから分析する．

2.2　季節ダミー

季節性の周期を J とする．

定義 4. j 番目の**季節ダミー**は

$$D_t^j := \begin{cases} 1 & t \text{ は } j \text{ 番目の季節} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

例 1. 四半期系列なら第 1 四半期〜第 4 四半期ダミー．月次系列なら 1 月〜12 月ダミー．

注 2. 季節変動は次のように表せる．

$$S_t = \beta_1 D_t^1 + \cdots + \beta_J D_t^J$$

$(\beta_1, \dots, \beta_J)$ は OLS で推定できる．ただし定数項があると多重共線性が生じる．その場合は季節ダミーを 1 つ落とす．

2.3　季節階差

季節変動は季節ダミーで OLS 推定できるが，季節階差で消してもよい．

定義 5. 周期 J の季節性をもつ時系列 $\{y_t\}$ の**季節階差系列**は $\{\Delta_J y_t\}$.

注 3. Δ_J は（後退）季節階差演算子．すなわち $\Delta_J y_t := y_t - y_{t-J}$.

定理 1.

$$S_t := \beta_1 D_t^1 + \cdots + \beta_J D_t^J \Longrightarrow \Delta_J S_t = 0$$

証明.

$$\begin{aligned} \Delta_J S_t &:= S_t - S_{t-J} \\ &= \beta_1 D_t^1 + \cdots + \beta_J D_t^J \\ &\quad - \left(\beta_1 D_{t-J}^1 + \cdots + \beta_J D_{t-J}^J\right) \\ &= \beta_1 \left(D_t^1 - D_{t-J}^1\right) + \cdots \\ &\quad + \beta_J \left(D_t^J - D_{t-J}^J\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

例 2. スイスの医薬品販売額の原系列・対数系列・対数階差・対数季節階差（図 1）.

3　トレンドと平滑化

3.1　多項式トレンド

定義 6. 時系列の長期的な傾向を**トレンド**という．

定義 7. 時点 t の n 次多項式で表すトレンドを **n 次トレンド**という．

注 4. すなわち

$$T_t := \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_n t^n$$

$(\beta_0, \dots, \beta_n)$ は OLS で推定できる．また 1 次トレンド＝線形トレンド．

例 3. NYSE 総合指数（対数値）の 1 次トレンドと残差（図 2）.

3.2　階差

n 次トレンドは OLS 推定できるが，n 階差で消してもよい．

例 4. $T_t := \beta_0 + \beta_1 t$ とすると

$$\begin{aligned} \Delta T_t &:= T_t - T_{t-1} \\ &= (\beta_0 + \beta_1 t) - [\beta_0 + \beta_1 (t-1)] \\ &= \beta_1 \end{aligned}$$

$T_t := \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ とすると

$$\begin{aligned} \Delta T_t &:= T_t - T_{t-1} \\ &= (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2) \\ &\quad - \left[\beta_0 + \beta_1 (t-1) + \beta_2 (t-1)^2\right] \\ &= \beta_1 + \beta_2 \left[t^2 - (t-1)^2\right] \\ &= \beta_1 + \beta_2 (2t-1) \\ \Delta^2 T_t &:= \Delta T_t - \Delta T_{t-1} \\ &= [\beta_1 + \beta_2 (2t-1)] \\ &\quad - \{\beta_1 + \beta_2 [2(t-1) - 1]\} \\ &= \beta_2 [(2t-1) - (2t-3)] \\ &= 2\beta_2 \end{aligned}$$

3.3　平滑化（p. 209）

定義 8. 時系列を滑らかにしてトレンドを求めることを**平滑化**という．

定義 9. 時系列の直近 n 期の観測値の平均を **n 期（単純）移動平均**という．

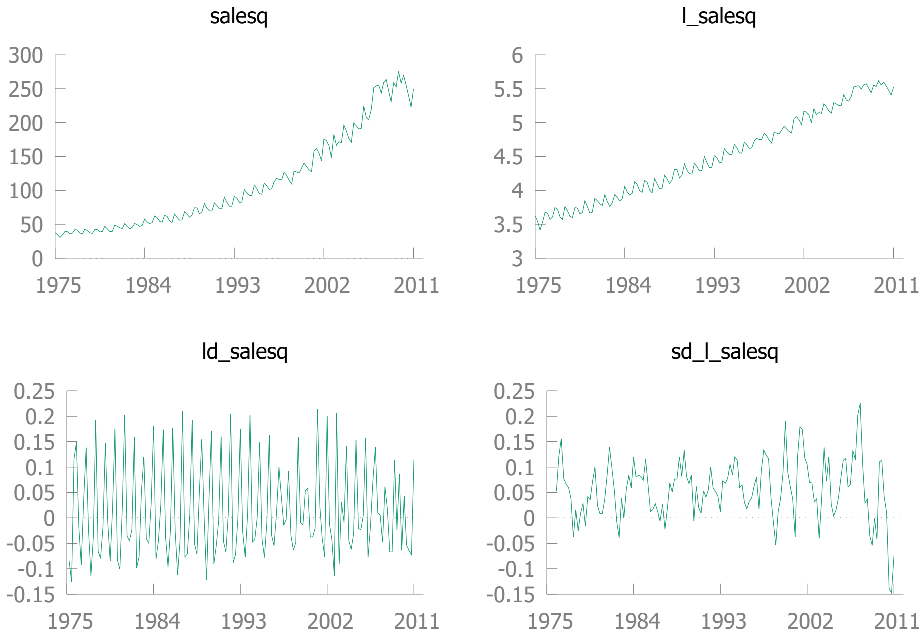

図 1　スイスの医薬品販売額の原系列・対数系列・対数階差・対数季節階差

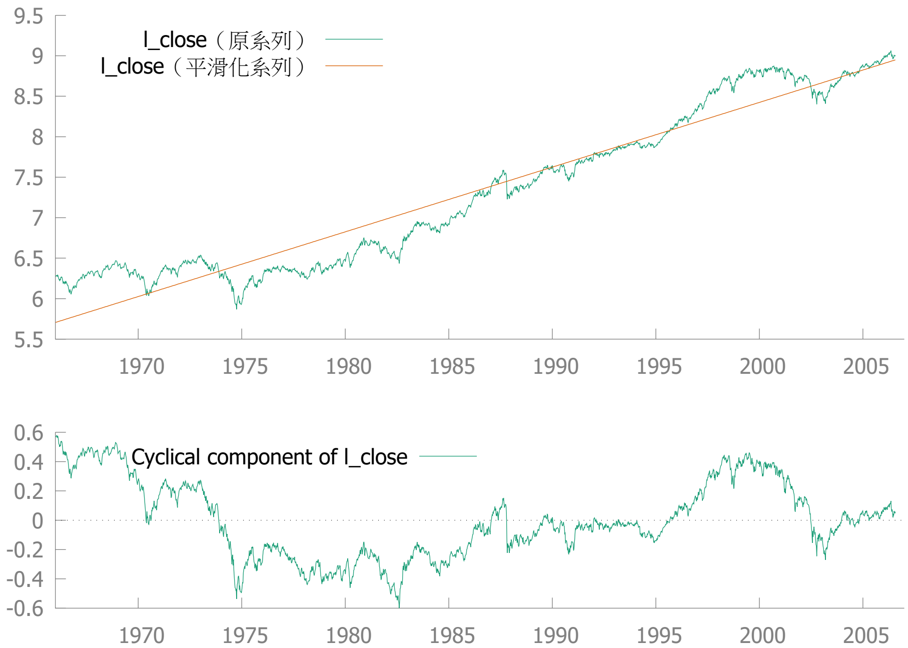

図 2　NYSE 総合指数（対数値）の 1 次トレンドと残差

注 5. すなわち

$$T_t := \frac{y_t + \cdots + y_{t-n+1}}{n}$$

ただし $T_1, \ldots, T_{n-1}$ は求まらない．

注 6. 他にも様々な平滑化法がある．

4　構造変化

4.1　構造変化ダミー（p. 127）

オイル・ショックやバブル崩壊など大きなショックにより，ある時点を境に時系列（確率過程）の特性が大きく変化する場合がある．確率過程 $\{Y_t\}$ の平均が時点 T で変化する場合は

$$\mathrm{E}(Y_t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{for } t < T \\ \mu_1 & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

定義 10. 時系列（確率過程）の特性の予期せぬ変化を**構造変化**という．

定義 11. 時点 T の**構造変化ダミー**は

$$D_t := \begin{cases} 0 & \text{for } t < T \\ 1 & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

注 7. 構造変化ダミーを用いると

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y_t) &= (1 - D_t)\mu_0 + D_t\mu_1 \\ &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)D_t \end{aligned}$$

$(\mu_0, \mu_1 - \mu_0)$ は OLS で推定できる．

4.2　回帰モデル（p. 130）

X_t を説明変数，Y_t を被説明変数とし，Y_t の X_t 上への単回帰モデルを考える．時点 T で係数が変わる場合は

$$\mathrm{E}(Y_t|X_t) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 X_t & \text{for } t < T \\ \alpha_1 + \beta_1 X_t & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

構造変化ダミーを用いると

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(Y_t|X_t) \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D_t + [\beta_0 + (\beta_1 - \beta_0)D_t]X_t \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D_t + \beta_0 X_t + (\beta_1 - \beta_0)D_t X_t \end{aligned}$$

すなわち $D_t, X_t, D_t X_t$ を説明変数として構造変化前後の係数を推定できる．また各係数の構造変化の有無の t 検定や F 検定（チョウ検定）も可能．

5　今日のキーワード

フィルター，季節性（季節変動），季節調整，季節ダミー，季節階差系列，トレンド，n 次トレンド，平滑化，n 期（単純）移動平均，構造変化，構造変化ダミー

6　次回までの準備

提出　宿題 2

復習　教科書第 4 章 3 節，第 7 章 1.1–1.2 節，復習テスト 2

予習　教科書第 2 章 1.3 節，第 2 章 3.1 節，第 4 章 2 節，第 7 章 2 節