

第4回 ARMA 過程 (7.3.1, 7-C)

村澤 康友

2023年10月16日

今日のポイント

- 1. 任意の t について $Ly_t := y_{t-1}$ とする L をラグ演算子という。ラグ演算子の多項式をラグ多項式という。
- 2. p 次の自己回帰 (AR) 過程は, 任意の t について $\phi(L)(y_t - \mu) = w_t$, ただし $\phi(L)$ はラグ多項式で $\{w_t\}$ は WN. Yule-Walker 方程式は AR 係数と ACF の関係を与える。
- 3. q 次の移動平均 (MA) 過程は, 任意の t について $y_t = \mu + \theta(L)w_t$, ただし $\theta(L)$ はラグ多項式で $\{w_t\}$ は WN. 共分散定常過程は $MA(\infty)$ で表現できる (Wold 分解). $AR(\infty)$ で表現できる MA 過程を反転可能という。
- 4. (p, q) 次の自己回帰移動平均 (ARMA) 過程は, 任意の t について $\phi(L)(y_t - \mu) = \theta(L)w_t$.

目次

1	漸化式とラグ演算子	1
1.1	漸化式	1
1.2	ラグ演算子	2
2	AR 過程	2
2.1	AR(1) 過程 (pp. 219, 238)	2
2.2	AR(p) 過程 (p. 220)	2
2.3	共分散定常性 (p. 220)	2
2.4	自己共分散	3

2.5	自己相関	4
2.6	偏自己相関	4
3	MA 過程	4
3.1	MA(1) 過程 (p. 221)	4
3.2	MA(q) 過程 (p. 221)	4
3.3	Wold 分解 (p. 220)	6
3.4	自己共分散	6
3.5	自己相関	7
3.6	反転可能性 (p. 221)	7
3.7	偏自己相関	7
4	ARMA 過程	7
4.1	ARMA(1,1) 過程 (p. 221)	7
4.2	ARMA(p, q) 過程 (p. 221)	8
5	今日のキーワード	8
6	次回までの準備	8

1 漸化式とラグ演算子

1.1 漸化式

$\{y_t\}, \{w_t\}$ を数列とする。

定義 1. $\{y_t\}$ の p 階漸化式は, 任意の $t \geq 1$ について

$$y_t = f(y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, w_t)$$

注 1. 初期値 $y_0, \dots, y_{-(p-1)}$ と非斉次項 $\{w_t\}$ で $\{y_t\}$ が一意に定まる。

定義 2. $\{y_t\}$ の p 階線形漸化式は, 任意の $t \geq 1$ について

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

1.2 ラグ演算子

定義 3. 任意の t について $Ly_t := y_{t-1}$ とする L をラグ演算子という.

定義 4. ラグ演算子の多項式をラグ多項式という.

注 2. p 次のラグ多項式は

$$\phi(L) := 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(L)y_t &= (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) y_t \\ &= y_t - \phi_1 Ly_t - \dots - \phi_p L^p y_t \\ &= y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p}\end{aligned}$$

したがって $\{y_t\}$ の p 階線形漸化式は, 任意の $t \geq 1$ について

$$\phi(L)y_t = w_t$$

2 AR 過程

2.1 AR(1) 過程 (pp. 219, 238)

$\{y_t\}$ を確率過程とする.

定義 5. 1 次の自己回帰 (*autoregressive, AR*) 過程は, 任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(L)(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2)\end{aligned}$$

ただし $\phi(L) := 1 - \phi L$.

注 3. AR(1) と書く.

注 4. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t$$

または

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + w_t$$

ただし $c := (1 - \phi)\mu$.

例 1. $\mu := 0$, $\phi := 0.9$ の AR(1) のコレログラム (図 1).

定理 1. $\{y_t\}$ が AR(1) で $|\phi| < 1$ なら任意の t について

$$E(y_t) = \mu$$

証明. 逐次代入により, 任意の t について

$$\begin{aligned}y_t - \mu &= \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t \\ &= \phi[\phi(y_{t-2} - \mu) + w_{t-1}] + w_t \\ &= \dots \\ &= w_t + \phi w_{t-1} + \phi^2 w_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s w_{t-s}\end{aligned}$$

これは $|\phi| < 1$ なら収束. 両辺の期待値をとると, 任意の t について $E(w_t) = 0$ なので

$$\begin{aligned}E(y_t - \mu) &= E\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s w_{t-s}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s E(w_{t-s}) \\ &= 0\end{aligned}$$

すなわち $E(y_t - \mu) = 0$ より $E(y_t) = \mu$. □

2.2 AR(p) 過程 (p. 220)

定義 6. p 次の AR 過程は, 任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(L)(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2)\end{aligned}$$

ただし $\phi(L) := 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$.

注 5. AR(p) と書く.

注 6. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t$$

または

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

ただし $c := (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)\mu$.

2.3 共分散定常性 (p. 220)

$\{y_t\}$ を AR(p) とする.

定理 2. p 次方程式 $\phi(z) = 0$ の p 個の根がすべて絶対値で 1 より大きいことが, AR(p) が共分散定常であるための必要十分条件.

証明. 省略 (大学院レベル). □

例 2. $p := 1$ なら $\phi(z) := 1 - \phi z$ より $\phi(z) = 0$ の根は $z = 1/\phi$. したがって $|z| > 1 \iff |\phi| < 1$.

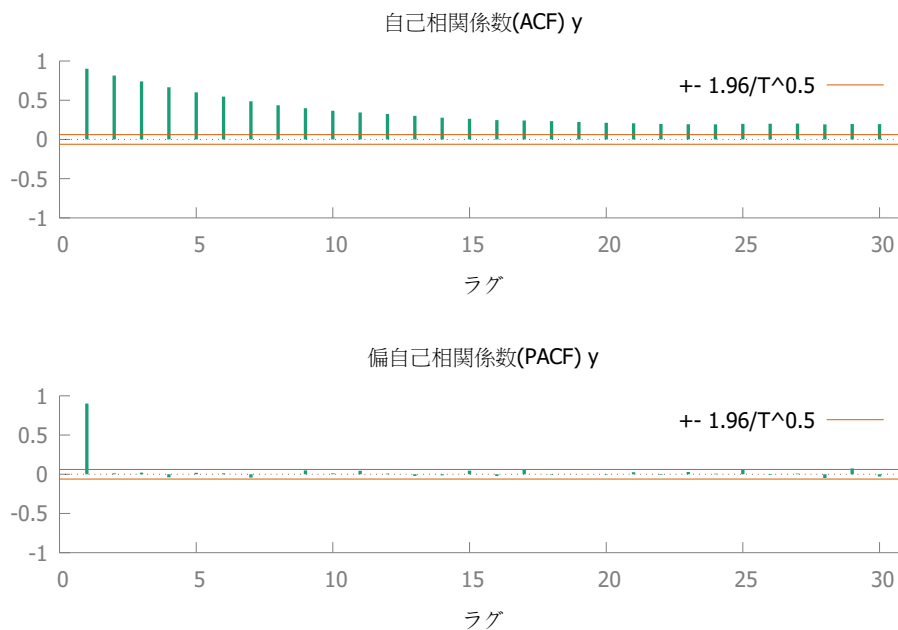


図1 $\mu := 0, \phi := 0.9$ の AR(1) のコレログラム

2.4 自己共分散

共分散定常な $AR(p)$ の自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ を求める.

補題 1. 任意の t と $s \geq 1$ について

$$\text{cov}(y_{t-s}, w_t) = 0$$

証明. 逐次代入により, 任意の t について

$$\begin{aligned} y_t - \mu &= \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t \\ &= \phi_1[\phi_1(y_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p-1} - \mu) + w_{t-1}] \\ &\quad + \dots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t \\ &= \dots \\ &= w_t + \phi_1 w_{t-1} + \dots \end{aligned}$$

任意の t と $s \neq 0$ について $\text{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので, $s \geq 1$ について

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_{t-s}, w_t) &= \text{cov}(w_{t-s} + \phi_1 w_{t-s-1} + \dots, w_t) \\ &= \text{cov}(w_{t-s}, w_t) + \phi_1 \text{cov}(w_{t-s-1}, w_t) + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

補題 2. 任意の t について

$$\text{cov}(y_t, w_t) = \sigma^2$$

証明. 任意の t について $\text{var}(w_t) = \sigma^2$ なので, 前補題より

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_t, w_t) &= \text{cov}(c + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + w_t, w_t) \\ &= \text{cov}(\phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + w_t, w_t) \\ &= \phi_1 \text{cov}(y_{t-1}, w_t) + \dots + \phi_p \text{cov}(y_{t-p}, w_t) \\ &\quad + \text{var}(w_t) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

□

定理 3.

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \phi_1 \gamma(1) + \dots + \phi_p \gamma(p) + \sigma^2 \\ \gamma(1) &= \phi_1 \gamma(0) + \dots + \phi_p \gamma(p-1) \\ &\vdots \\ \gamma(p) &= \phi_1 \gamma(p-1) + \dots + \phi_p \gamma(0) \\ \square \quad \gamma(s) &= \phi_1 \gamma(s-1) + \dots + \phi_p \gamma(s-p), \quad s \geq p+1 \end{aligned}$$

証明. 前補題より

$$\begin{aligned}
 \gamma(0) &:= \text{var}(y_t) \\
 &= \text{cov}(y_t, y_t) \\
 &= \text{cov}(y_t, c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t) \\
 &= \text{cov}(y_t, \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t) \\
 &= \phi_1 \text{cov}(y_t, y_{t-1}) + \cdots + \phi_p \text{cov}(y_t, y_{t-p}) \\
 &\quad + \text{cov}(y_t, w_t) \\
 &= \phi_1 \gamma(1) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma^2
 \end{aligned}$$

前々補題より

$$\begin{aligned}
 \gamma(1) &:= \text{cov}(y_t, y_{t-1}) \\
 &= \text{cov}(c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, y_{t-1}) \\
 &= \text{cov}(\phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, y_{t-1}) \\
 &= \phi_1 \text{cov}(y_{t-1}, y_{t-1}) + \cdots \\
 &\quad + \phi_p \text{cov}(y_{t-p}, y_{t-1}) + \text{cov}(w_t, y_{t-1}) \\
 &= \phi_1 \gamma(0) + \cdots + \phi_p \gamma(p-1)
 \end{aligned}$$

$\gamma(2)$ 以降も同様. □

2.5 自己相関

共分散定常な $\text{AR}(p)$ の ACF を $\rho(\cdot)$ とする.

定理 4 (Yule-Walker 方程式).

$$\begin{aligned}
 \rho(1) &= \phi_1 \rho(0) + \cdots + \phi_p \rho(p-1) \\
 &\vdots \\
 \rho(p) &= \phi_1 \rho(p-1) + \cdots + \phi_p \rho(0)
 \end{aligned}$$

証明. $s \geq 0$ について $\rho(s) = \gamma(s)/\gamma(0)$ なので, 前定理より結果が得られる. □

注 7. (ϕ_1, \dots, ϕ_p) と $\rho(1), \dots, \rho(p)$ の関係を与える連立方程式.

系 1. $s \geq p+1$ について

$$\rho(s) = \phi_1 \rho(s-1) + \cdots + \phi_p \rho(s-p)$$

証明. 前定理と同じ. □

注 8. すなわち $\{\rho(s)\}$ は初期値 $\rho(1), \dots, \rho(p)$ の p 階線形漸化式.

2.6 偏自己相関

$\{y_t\}$ の PACF を $\alpha(\cdot)$ とする.

定理 5. $\{y_t\}$ が $\text{AR}(p)$ なら $s \geq p+1$ について $\alpha(s) = 0$.

証明. $\text{AR}(p)$ は $p+1$ 次以上の AR 係数が 0 の $\text{AR}(\infty)$. 偏回帰係数=0 \iff 偏相関係数=0 より AR 係数が 0 なら $\alpha(s) = 0$. □

3 MA 過程

3.1 MA(1) 過程 (p. 221)

定義 7. 1 次の移動平均 (*moving average, MA*) 過程は, 任意の t について

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mu + \theta(L)w_t \\
 \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2)
 \end{aligned}$$

ただし $\theta(L) := 1 - \theta L$.

注 9. MA(1) と書く.

注 10. すなわち任意の t について

$$y_t = \mu + w_t - \theta w_{t-1}$$

例 3. $\mu := 0, \theta := 0.9$ の MA(1) のコレログラム (図 2) と $\mu := 0, \theta := -0.9$ の MA(1) のコレログラム (図 3).

3.2 MA(q) 過程 (p. 221)

定義 8. q 次の MA 過程は, 任意の t について

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mu + \theta(L)w_t \\
 \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2)
 \end{aligned}$$

ただし $\theta(L) := 1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q$.

注 11. MA(q) と書く.

注 12. すなわち任意の t について

$$y_t = \mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}$$

定理 6. $\{y_t\}$ が MA(q) なら任意の t について

$$E(y_t) = \mu$$

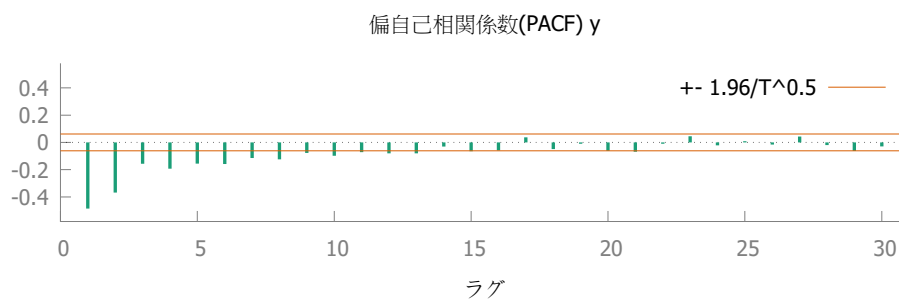
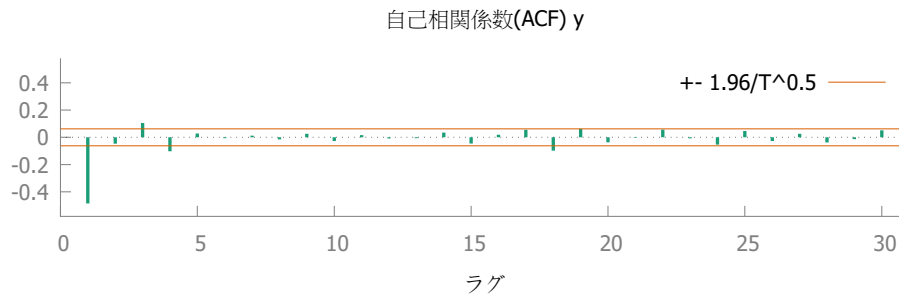


図2 $\mu := 0, \theta := 0.9$ の MA(1) のコレログラム

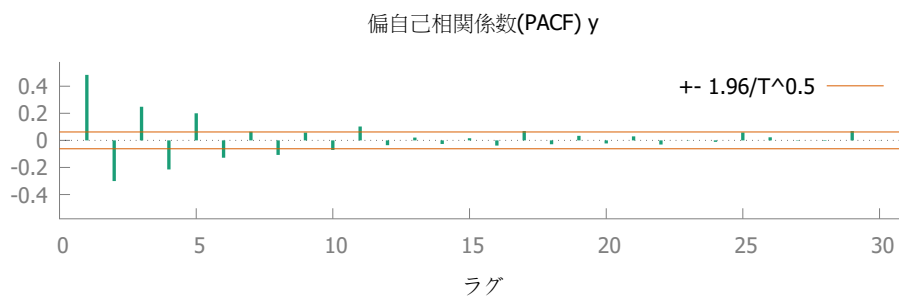
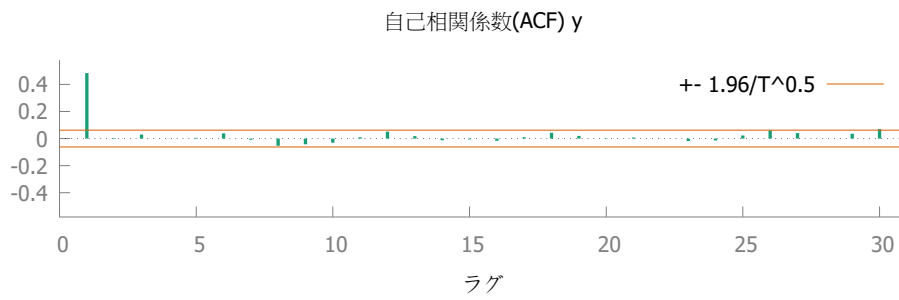


図3 $\mu := 0, \theta := -0.9$ の MA(1) のコレログラム

証明. 任意の t について $E(w_t) = 0$ なので

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}) \\ &= \mu + E(w_t) - \theta_1 E(w_{t-1}) - \cdots - \theta_q E(w_{t-q}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

□

3.3 Wold 分解 (p. 220)

定理 7 (Wold 分解). $\{y_t\}$ が平均 0 で共分散定常なら, 任意の t について

$$y_t = d_t + \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s w_{t-s}$$

ただし $\{d_t\}$ は決定的, $\{w_t\}$ はホワイト・ノイズで $\{d_t\}$ と無相関.

証明. 省略 (大学院レベル). □

系 2. 純粋に非決定的な共分散定常過程は $MA(\infty)$ として表現できる.

3.4 自己共分散

$MA(q)$ の自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ を求める.

補題 3. 任意の t について

$$\text{var}(y_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma^2$$

証明. 任意の t について $\text{var}(w_t) = \sigma^2$ かつ $s \neq 0$ について $\text{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので

$$\begin{aligned} \text{var}(y_t) &= \text{var}(\mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}) \\ &= \text{var}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}) \\ &= \text{var}(w_t) + \theta_1^2 \text{var}(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q^2 \text{var}(w_{t-q}) \\ &= (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

□

補題 4. $\{y_t\}$ が $MA(q)$ なら任意の t と $s = 1, \dots, q$ について

$$\text{cov}(y_t, y_{t-s}) = (-\theta_s + \theta_{s+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-s})\sigma^2$$

証明. 任意の t について $\text{var}(w_t) = \sigma^2$ かつ $s \neq 0$ について $\text{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_t, y_{t-1}) &= \text{cov}(\mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}, \\ &\quad \mu + w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\ &= \text{cov}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}, \\ &\quad w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\ &= \text{cov}(w_t, w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\ &\quad - \theta_1 \text{cov}(w_{t-1}, w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\ &\quad - \cdots \\ &\quad - \theta_q \text{cov}(w_{t-q}, w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-1-q}) \\ &= -\theta_1 \text{var}(w_{t-1}) + \theta_2 \theta_1 \text{var}(w_{t-2}) + \cdots \\ &\quad + \theta_q \theta_{q-1} \text{var}(w_{t-q}) \\ &= (-\theta_1 + \theta_2 \theta_1 + \cdots + \theta_q \theta_{q-1}) \sigma^2 \end{aligned}$$

$s = 2, \dots, q$ についても同様. □

補題 5. $\{y_t\}$ が $MA(q)$ なら任意の t と $s \geq q + 1$ について

$$\text{cov}(y_t, y_{t-s}) = 0$$

証明. 任意の t と $s \neq 0$ について $\text{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので, $s \geq q + 1$ より

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_t, y_{t-s}) &= \text{cov}(\mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}, \\ &\quad \mu + w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\ &= \text{cov}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}, \\ &\quad w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\ &= \text{cov}(w_t, w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\ &\quad - \theta_1 \text{cov}(w_{t-1}, w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\ &\quad - \cdots \\ &\quad - \theta_q \text{cov}(w_{t-q}, w_{t-s} - \theta_1 w_{t-s-1} - \cdots - \theta_q w_{t-s-q}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

定理 8. $MA(q)$ の自己共分散関数は

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma^2 \\ \gamma(1) &= (-\theta_1 + \theta_2 \theta_1 + \cdots + \theta_q \theta_{q-1}) \sigma^2 \\ &\quad \vdots \\ \gamma(q) &= -\theta_q \sigma^2 \\ \gamma(s) &= 0, \quad s \geq q + 1 \end{aligned}$$

証明. 前3補題より結果が得られる.

3.5 自己相関

MA(q) の ACF を $\rho(\cdot)$ とする.

系 3.

$$\begin{aligned}\rho(1) &= \frac{-\theta_1 + \theta_2\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-1}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} \\ &\vdots \\ \rho(q) &= \frac{-\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} \\ \rho(s) &= 0, \quad s \geq q + 1\end{aligned}$$

証明. $s \geq 0$ について $\rho(s) = \gamma(s)/\gamma(0)$ なので, 前定理より結果が得られる. \square

3.6 反転可能性 (p. 221)

定理 9. 次の2つの MA(1) は同じ自己共分散関数をもつ.

1. 任意の t について

$$\begin{aligned}y_t &= \mu + w_t - \theta w_{t-1} \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2)\end{aligned}$$

2. 任意の t について

$$\begin{aligned}y_t^* &= \mu + w_t^* - \theta^{-1}w_{t-1}^* \\ \{w_t^*\} &\sim \text{WN}(\theta^2\sigma^2)\end{aligned}$$

証明. 前者の自己共分散関数は

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (1 + \theta^2)\sigma^2 \\ \gamma(1) &= -\theta\sigma^2 \\ \gamma(s) &= 0, \quad s \geq 2\end{aligned}$$

θ を θ^{-1} に, σ^2 を $\theta^2\sigma^2$ に置き換えると

$$\begin{aligned}\gamma^*(0) &= (1 + \theta^{-2})\theta^2\sigma^2 \\ &= (1 + \theta^2)\sigma^2 \\ \gamma^*(1) &= -\theta^{-1}\theta^2\sigma^2 \\ &= -\theta\sigma^2 \\ \gamma^*(s) &= 0, \quad s \geq 2\end{aligned}$$

したがって $\gamma(\cdot) = \gamma^*(\cdot)$.

\square 定理 10. $|\theta| < 1$ なら MA(1) は AR(∞) で表現できる.

証明. 逐次代入により, 任意の t について

$$\begin{aligned}w_t &= y_t - \mu + \theta w_{t-1} \\ &= y_t - \mu + \theta(y_{t-1} - \mu + \theta w_{t-2}) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \theta^s (y_{t-s} - \mu)\end{aligned}$$

すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = -\sum_{s=1}^{\infty} \theta^s (y_{t-s} - \mu) + w_t$$

右辺の収束の必要十分条件は $|\theta| < 1$. \square

定義 9. AR(∞) で表現できる MA 過程を反転可能という.

定理 11. q 次方程式 $\theta(z) = 0$ の q 個の根がすべて絶対値で 1 より大きいことが, MA(q) が反転可能であるための必要十分条件.

証明. 省略 (大学院レベル). \square

3.7 偏自己相関

$\{y_t\}$ の PACF を $\alpha(\cdot)$ とする.

定理 12. $\{y_t\}$ が反転可能なら一般に $\alpha(s) \neq 0$.

証明. 反転可能な MA 過程は AR(∞) で表現できる. 偏回帰係数=0 \iff 偏相関係数=0 より AR 係数が 0 でない限り $\alpha(s) \neq 0$. \square

4 ARMA 過程

4.1 ARMA(1,1) 過程 (p. 221)

定義 10. (1,1) 次の自己回帰移動平均 (autoregressive moving average, ARMA) 過程は, 任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(L)(y_t - \mu) &= \theta(L)w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2)\end{aligned}$$

\square ただし $\phi(L) := 1 - \phi L$, $\theta(L) := 1 - \theta L$.

注 13. ARMA(1,1) と書く.

注 14. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t - \theta w_{t-1}$$

または

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + w_t - \theta w_{t-1}$$

ただし $c := (1 - \phi)\mu$.

注 15. $\phi = \theta$ なら両辺を $\phi(L) = \theta(L)$ で割ると,
任意の t について

$$y_t - \mu = w_t$$

例 4. $\mu := 0$, $\phi := 0.9$, $\theta := 0.9$ の ARMA(1,1) の
コレログラム (図 4) と $\mu := 0$, $\phi := 0.9$, $\theta := -0.9$
の ARMA(1,1) のコレログラム (図 5).

4.2 ARMA(p, q) 過程 (p. 221)

定義 11. (p, q) 次の ARMA 過程は, 任意の t につ
いて

$$\begin{aligned}\phi(L)(y_t - \mu) &= \theta(L)w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\sigma^2)\end{aligned}$$

ただし $\phi(L) := 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$, $\theta(L) :=$
 $1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$.

注 16. ARMA(p, q) と書く.

5 今日のキーワード

漸化式, 線形漸化式, ラグ演算子, ラグ多項式,
自己回帰 (AR) 過程, Yule-Walker 方程式, 移動
平均 (MA) 過程, Wold 分解, 反転可能性, 自己回
帰移動平均 (ARMA) 過程

6 次回までの準備

提出 宿題 4

復習 教科書第 7 章 3.1 節, 第 7 章付録 C, 復習テ
スト 4

予習 教科書第 7 章 3.2 節

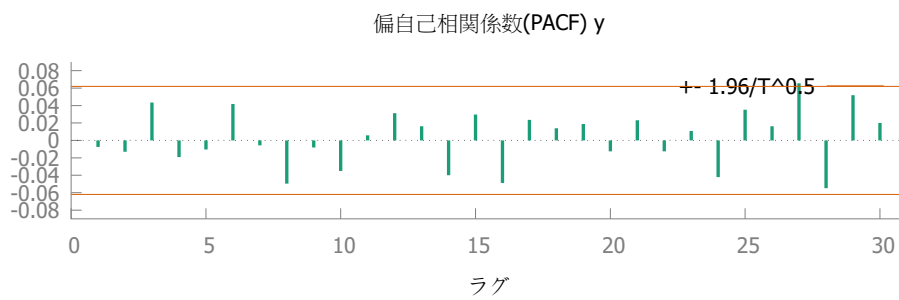


図4 $\mu := 0, \phi := 0.9, \theta := 0.9$ の ARMA(1,1) のコレログラム

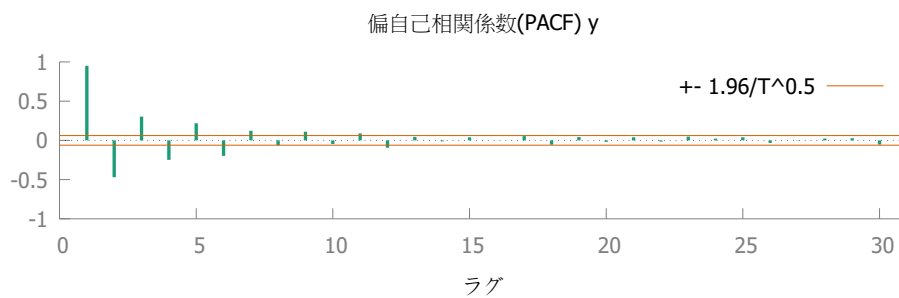
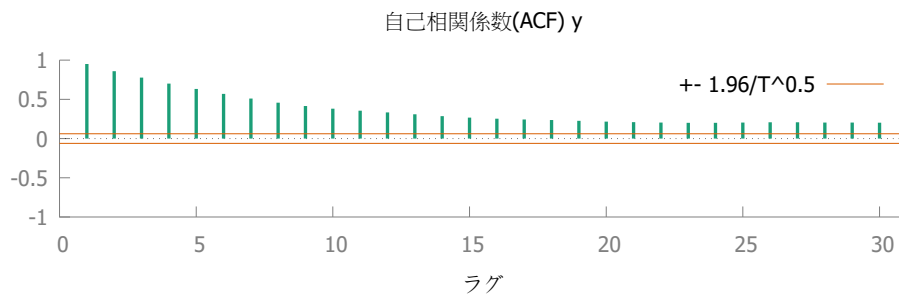


図5 $\mu := 0, \phi := 0.9, \theta := -0.9$ の ARMA(1,1) のコレログラム