# 第 5 回　1 変量時系列モデルの定式化と推定（7.3.2, 7.5.1）

村澤 康友

2023 年 10 月 23 日

## 今日のポイント

1. $\{\Delta^d y_t\}$ が共分散定常なら $\{y_t\}$ を $d$ 次の和分（単位根）過程という．$\{\Delta y_t\}$ が WN なら $\{y_t\}$ をランダム・ウォークという．$\{\Delta^d y_t\}$ が ARMA$(p,q)$ なら $\{y_t\}$ を $(p,d,q)$ 次の自己回帰和分移動平均（ARIMA）過程という．
2. AR モデルの係数の OLS 推定量は不偏でないが一致性をもつ．
3. ARMA モデルの尤度関数は予測誤差分解で計算する．時系列の同時 pdf を尤度とする ML 法を厳密な ML 法，初期値を所与とした条件つき pdf を尤度とする ML 法を条件つき ML 法という．
4. ARMA モデルの次数は AIC・SBIC・HQC 等のモデル選択基準で選ぶ．

## 目次



## 1　ARIMA 過程

### 1.1　差分と和分

$\{x_t\}$ を $t=1$ から始まる数列とする．

**定義 1.** $\{x_t\}$ の**差分（階差）**は $\{\Delta x_t\}$．

**定義 2.** $\{x_t\}$ の**和分**は $t \geq 1$ について

$$S_t := x_1 + \cdots + x_t$$

注 1. $t \geq 1$ について

$$\begin{aligned}\Delta S_t &:= S_t - S_{t-1} \\ &= x_1 + \cdots + x_t - (x_1 + \cdots + x_{t-1}) \\ &= x_t\end{aligned}$$

すなわち和分は差分の逆の演算．離散空間上の差分と和分の関係は，連続空間上の微分と積分の関係に相当．

### 1.2　和分（単位根）過程（p. 231）

$\{y_t\}$ を確率過程とする．

**定義 3.** $\{\Delta^d y_t\}$ が共分散定常なら $\{y_t\}$ を $d$ **次の和分（単位根）過程**という．

注 2. $\mathrm{I}(d)$ と書く．$\mathrm{I}(0)$ =共分散定常．

注 3. $\mathrm{I}(d)$ は $\mathrm{I}(0)$ に変換して分析する．

**定義 4.** $\{\Delta y_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\{y_t\}$ を**ランダム・ウォーク**という．

注 4. $\{w_t\}$ を WN とすると，任意の $t$ について

$$\Delta y_t = w_t$$

AR(1) は，任意の $t$ について

$$\phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) = w_t$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi\mathrm{L}$. ランダム・ウォークは $\phi = 1$ の AR(1). このとき $\phi(z) := 1 - z = 0$ の根は $z = 1$（単位根）．

### 1.3 ARIMA 過程（p. 221）

$\{y_t\}$ を $\mathrm{I}(d)$ とする．

**定義 5.** $\{\Delta^d y_t\}$ が ARMA$(p,q)$ なら $\{y_t\}$ を $(p,d,q)$ 次の自己回帰和分移動平均（ARIMA）過程という．

注 5. ARIMA$(p,d,q)$ と書く．

## 2 AR モデルの OLS 推定

### 2.1 OLS 推定量

時系列 $(y_0, \dots, y_T)$ に平均 0 の AR(1) モデルを仮定する．すなわち $t = 1, \dots, T$ について

$$\begin{aligned} y_t &= \phi y_{t-1} + w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right) \end{aligned}$$

ただし $|\phi| < 1$. $\phi$ の OLS 推定量を $\hat{\phi}_T$ とすると

$$\hat{\phi}_T = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}$$

### 2.2 有限標本特性

**定理 1.** 一般に

$$\mathrm{E}\left(\hat{\phi}_T\right) \neq \phi$$

証明. 式変形すると

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_T &= \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1}(\phi y_{t-1} + w_t)}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \\ &= \phi + \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} w_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \end{aligned}$$

第 2 項の期待値は

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} w_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}\right) \\ &= \sum_{t=1}^T \mathrm{E}\left(\frac{y_{t-1} w_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\frac{y_0 w_1}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(\frac{y_{T-1} w_T}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}\right) \\ &= \mathrm{cov}\left(\frac{y_0}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}, w_1\right) + \cdots \\ &\quad + \mathrm{cov}\left(\frac{y_{T-1}}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}, w_T\right) \end{aligned}$$

$w_1$ は $y_1, \dots, y_{T-1}$ と相関するので第 1 項は一般に 0 でない．同様に他の項も一般に 0 でない． □

注 6. 無作為標本でないため OLS 推定量は不偏でない．

### 2.3 漸近特性

**定理 2.**

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \hat{\phi}_T = \phi$$

証明. 式変形すると

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_T &= \phi + \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} w_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \\ &= \phi + \frac{(1/T)\sum_{t=1}^T y_{t-1} w_t}{(1/T)\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \end{aligned}$$

エルゴード定理より

$$\begin{aligned} \operatorname*{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T y_{t-1} w_t &= \mathrm{E}(y_{t-1} w_t) \\ \operatorname*{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 &= \mathrm{E}\left(y_{t-1}^2\right) \end{aligned}$$

漸近演算より

$$\begin{aligned}\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\hat{\phi}_T &= \phi + \frac{\operatorname{plim}_{T\to\infty}(1/T)\sum_{t=1}^T y_{t-1}w_t}{\operatorname{plim}_{T\to\infty}(1/T)\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \\ &= \phi + \frac{\mathrm{E}(y_{t-1}w_t)}{\mathrm{E}\left(y_{t-1}^2\right)}\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(y_{t-1}w_t) = \mathrm{cov}(y_{t-1}, w_t) = 0$ より第 2 項は 0. □

注 7. すなわち OLS 推定量は一致性をもつ．また漸近正規性も証明できる（省略）.

# 3 正規 ARMA モデルの ML 推定

## 3.1 最尤（ML）法

パラメトリックな確率過程を仮定する．母数を $\theta$ とし，観測する時系列の同時 pmf・pdf を $f(.;\theta)$ とする.

**定義 6.** ある母数の下で標本の実現値を観測する確率（密度）を，その母数の**尤度**という.

注 8. $(y_1,\dots,y_T)$ を観測する確率（密度）は

$$f(y_1,\dots,y_T;\theta)$$

これを $\theta$ の「尤もらしさ」と解釈する.

**定義 7.** 標本の pmf・pdf を母数の尤度を表す関数とみたものを**尤度関数**という.

注 9. $L(\theta;y_1,\dots,y_T)$ と書く（$(y_1,\dots,y_T)$ と $\theta$ の位置が pmf・pdf と逆）.

注 10. $(y_1,\dots,y_T)$ を観測したときの $\theta$ の尤度関数は

$$L(\theta;y_1,\dots,y_T) := f(y_1,\dots,y_T;\theta)$$

**定義 8.** 尤度関数の対数を**対数尤度関数**という.

注 11. $\ell(\theta;y_1,\dots,y_T)$ と書く.

注 12. $(y_1,\dots,y_T)$ を観測したときの $\theta$ の対数尤度関数は

$$\begin{aligned}\ell(\theta;y_1,\dots,y_T) &:= \ln L(\theta;y_1,\dots,y_T) \\ &= \ln f(y_1,\dots,y_T;\theta)\end{aligned}$$

**定義 9.** （対数）尤度関数を最大にする解を母数の推定値とする手法を**最尤**（*maximum likelihood, ML*）**法**という.

**定義 10.** ML 法による推定量を *ML* **推定量**という.

**定理 3.** *ML* 推定量は一般に漸近有効.

証明. 省略（大学院レベル）. □

## 3.2 予測誤差分解

時系列 $(y_1,\dots,y_T)$ の同時 pdf を $f(.)$，条件つき pdf を $f(.|.)$ で表す.

**定理 4** (予測誤差分解)**.** 任意の $(y_1,\dots,y_T)$ について

$$\begin{aligned}&f(y_1,\dots,y_T) \\ &= f(y_T|y_{T-1},\dots,y_1)\cdots f(y_2|y_1)f(y_1)\end{aligned}$$

証明. 条件つき pdf の定義より，任意の $(y_1,\dots,y_T)$ について

$$\begin{aligned}&f(y_1,\dots,y_T) \\ &= \frac{f(y_1,\dots,y_T)}{f(y_1,\dots,y_{T-1})}\frac{f(y_1,\dots,y_{T-1})}{f(y_1,\dots,y_{T-2})}\cdots \\ &\quad \frac{f(y_1,y_2)}{f(y_1)}f(y_1) \\ &= f(y_T|y_{T-1},\dots,y_1)f(y_{T-1}|y_{T-2},\dots,y_1)\cdots \\ &\quad f(y_2|y_1)f(y_1)\end{aligned}$$

□

注 13. 確率の乗法定理と同じ.

**例 1.** 時系列 $(y_1,\dots,y_T)$ に平均 0 の正規 AR(1) モデルを仮定する．すなわち $t=1,\dots,T$ について

$$\begin{aligned}y_t &= \phi y_{t-1} + w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{IN}\left(0,\sigma^2\right)\end{aligned}$$

ただし $|\phi|<1$.[*1] $\mathrm{var}(y_1) = \sigma^2/\left(1-\phi^2\right)$ より

$$y_1 \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)$$

また $t=2,\dots,T$ について

$$y_t|y_{t-1},\dots,y_1 \sim \mathrm{N}\left(\phi y_{t-1},\sigma^2\right)$$

[*1] $\mathrm{IN}\left(0,\sigma^2\right)$ は独立な $\mathrm{N}\left(0,\sigma^2\right)$ の意味.

予測誤差分解より尤度関数は

$$\begin{aligned}
&L(\phi,\sigma^2;y_1,\dots.y_T)\\
&:= f(y_1,\dots,y_T)\\
&= f(y_T|y_{T-1},\dots,y_1)\cdots f(y_2|y_1)f(y_1)\\
&= \prod_{t=2}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(y_t-\phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)\\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\phi^2)}}\exp\left(-\frac{y_1^2}{2\sigma^2/(1-\phi^2)}\right)
\end{aligned}$$

対数尤度関数は

$$\begin{aligned}
&\ell(\phi,\sigma^2;y_1,\dots.y_T)\\
&:= \ln L(\phi,\sigma^2;y_1,\dots.y_T)\\
&= \sum_{t=2}^{T}\left\{-\frac{1}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(y_t-\phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&\quad -\frac{1}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}-\frac{y_1^2}{2\sigma^2/(1-\phi^2)}\\
&= -\frac{T}{2}\ln 2\pi-\frac{T}{2}\ln\sigma^2+\frac{1}{2}\ln\left(1-\phi^2\right)\\
&\quad -\frac{(1-\phi^2)y_1^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t-\phi y_{t-1})^2
\end{aligned}$$

### 3.3 厳密な ML 法（p. 221）

**定義 11.** $(y_1,\dots,y_T)$ の同時 pdf を尤度とする ML 法を**厳密な** *ML* **法**という．

注 14. 漸近有効だが尤度の計算が複雑（ARMA モデルを状態空間モデルで表現し，カルマン・フィルターで尤度を計算する）．

### 3.4 条件つき ML 法

**定義 12.** 初期値 $(y_1,\dots,y_p)$ と $(w_{p-q+1},\dots,w_p)$ を所与とした $(y_{p+1},\dots,y_T)$ の条件つき pdf を尤度とする ML 法を**条件つき** *ML* **法**という．

注 15. 初期値の周辺 pdf を省くため漸近有効でないが，推定が簡単になる．AR モデルなら条件つき ML 法＝ OLS.

## 4 次数選択

### 4.1 仮説検定とモデル選択

予測モデルの次数選択は仮説検定と異なる．

1. 真の次数が無限大なら真のモデルは推定できず仮説検定も無意味.
2. 真の次数が有限でも推定する係数が多いと予測値が不安定になる．

モデル選択基準による次数選択が便利.

### 4.2 Kullback–Leibler 情報量

確率変数 $Y$ の真の分布を $f_0(.)$，予測モデルの下での分布を $f(.)$ とする．

**定義 13.** $f(.)$ の $f_0(.)$ に対する *Kullback–Leibler* **情報量**は

$$I(f(.);f_0(.)) := -\mathrm{E}_{f_0}\left(\ln\frac{f(Y)}{f_0(Y)}\right)$$

注 16. $f(.)$ の $f_0(.)$ に対する「距離」を表す．$f(.)=f_0(.)$ なら「距離」は 0 で最小．ただし真の次数が無限大なら $f_0(.)$ は予測に使えない．式変形すると

$$I(f(.);f_0(.)) = -\mathrm{E}_{f_0}(\ln f(Y))+\mathrm{E}_{f_0}(\ln f_0(Y))$$

第 1 項を最小化，すなわち $\mathrm{E}_{f_0}(\ln f(Y))$ を最大化する $f(.)$ が最適な予測モデル．$\mathrm{E}_{f_0}(\ln f(Y))$ は未知なので推定が必要.

### 4.3 モデル選択基準（p. 224）

定常過程 $\{Y_t\}$ の 1 期先予測モデルを $f(.;\boldsymbol{\theta})$ とする．$\mathrm{E}(\ln f(Y_t;\boldsymbol{\theta}))$ を最大化する $\boldsymbol{\theta}$ を $\boldsymbol{\theta}^*$ とする．$\mathrm{E}(\ln f(Y_t;\boldsymbol{\theta}^*))$ の推定は 2 つの推定を含む.

1. $\boldsymbol{\theta}^*$ の推定
2. $\boldsymbol{\theta}^*$ を所与とした $\mathrm{E}(\ln f(Y_t;\boldsymbol{\theta}^*))$ の推定

$\boldsymbol{\theta}^*$ が既知ならエルゴード定理より

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln f(Y_t;\boldsymbol{\theta}^*) = \mathrm{E}(\ln f(Y_t;\boldsymbol{\theta}^*))$$

$\boldsymbol{\theta}^*$ の ML 推定量を $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ とする．左辺の $\boldsymbol{\theta}^*$ を $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ で置き換えると右辺の推定量として偏りが生じるので修正が必要．未知係数の数を $k$ とする．

**補題 1.** 任意の $\boldsymbol{\theta}$ と $(y_1,\dots,y_T)$ について

$$\sum_{t=1}^{T}\ln f(y_t;\boldsymbol{\theta}) = \ell(\boldsymbol{\theta};y_1,\dots,y_T)$$

証明．予測誤差分解より

$$f(y_1, \ldots, y_T; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^{T} f(y_t; \boldsymbol{\theta})$$

したがって

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}; y_1, \ldots, y_T) &:= \ln f(y_1, \ldots, y_T; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \sum_{t=1}^{T} \ln f(y_t; \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

□

**定義 14. 赤池の情報量基準（***Akaike's information criterion, AIC***）**は

$$\mathrm{AIC} := -2\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T; y_1, \ldots, y_T\right) + 2k$$

注 17. AIC が最小のモデルを選択する．第 2 項は偏りの修正項であり，モデルの大きさに対するペナルティーと解釈できる．

**定義 15.** 真のモデルを選ぶ確率が $T \to \infty$ で 1 に収束する性質をモデル選択基準の**一致性**という．

注 18. AIC は一致性をもたない（過剰定式化の傾向がある）．

**定義 16.** ***Schwarz*** **のベイズ情報量基準（***Schwarz's Bayesian information criterion, SBIC***）**は

$$\mathrm{SBIC} := -2\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T; y_1, \ldots, y_T\right) + k \ln T$$

注 19. $\boldsymbol{\theta}^*$ をベイズ法で推定した場合の周辺尤度 $\mathrm{E}(\ell(\boldsymbol{\theta}^*; y_1, \ldots, y_T))$ のラプラス近似から得られる．

注 20. SBIC は一致性をもつ．$\ln T > 2$ ならモデルの大きさに対するペナルティーが AIC より大きく，AIC より小さいモデルを選択する．

**定義 17.** ***Hannan–Quinn*** **の基準（***Hannan–Quinn criterion, HQC***）**は

$$\mathrm{HQC} := -2\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T; y_1, \ldots, y_T\right) + 2k \ln \ln T$$

注 21. HQC も一致性をもつ．モデルの大きさに対するペナルティーは AIC と SBIC の中間．

## 5 今日のキーワード

差分（階差），和分，和分（単位根）過程，ランダム・ウォーク，自己回帰和分移動平均（ARIMA）過程，尤度，尤度関数，対数尤度関数，最尤（ML）法，ML 推定量，予測誤差分解，厳密な ML 法，条件つき ML 法，Kullback–Leibler 情報量，赤池の情報量基準（AIC），一致性，Schwarz のベイズ情報量基準（SBIC），Hannan–Quinn の基準（HQC）

## 6 次回までの準備

**提出** 宿題 5

**復習** 教科書第 7 章 3.2, 5.1 節，復習テスト 5

**予習** 特になし