第 6 回　予測

村澤 康友

2023 年 10 月 30 日

今日のポイント

1. 予測に用いる統計量を予測子，予測子の実現値を予測値という．真の値の代わりに予測値を用いることの損失を表す関数を損失関数という．予測子の損失の（条件付き）期待値を与える関数を危険（リスク）関数という．危険関数が最小の予測子が最適．したがって最適予測は損失関数に依存する．
2. 予測誤差の 2 乗の（条件付き）期待値を予測子の平均 2 乗誤差（MSE）という．MSE ＝ 2 次の損失の危険関数．2 次の損失なら条件付き期待値が最適予測．
3. 2 次の損失なら最適な h 期先予測は $\mathrm{E}_t(y_{t+h})$．正規過程なら $\mathrm{var}_t(y_{t+h})$ から予測の信頼区間を作成できる．

目次

1　統計的意思決定

1.1　予測子

確率過程 $\{Y_t\}$ の h 期先予測を考える．

定義 1. 予測に用いる統計量を**予測子**という．

注 1. 時点 t までの観測値を所与とした Y_{t+h} の予測子を $\hat{Y}_{t+h|t}$ と書く．

定義 2. 予測子の実現値を**予測値**という．

1.2　損失関数

定義 3. 真の値の代わりに予測値を用いることの損失を表す関数を**損失関数**という．

注 2. 経済学における効用関数と同じ（符号は逆）．

注 3. $L\left(Y_{t+h}, \hat{Y}_{t+h|t}\right)$ と書く．$Y_{t+h} = \hat{Y}_{t+h|t}$ なら損失は 0．

定義 4. *2* **次の損失関数**は，任意の $y, \hat{y}$ について

$$L(y, \hat{y}) := (y - \hat{y})^2$$

定義 5. Y_{t+h} の $\hat{Y}_{t+h|t}$ に対する**予測誤差**は

$$e_{t+h} := Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}$$

注 4. 2 次の損失＝予測誤差の 2 乗．すなわち予測誤差の符号に関して対称な損失．

1.3　危険（リスク）関数

時点 t までの観測値を所与とした条件付き期待値を $\mathrm{E}_t(.)$ と書く．

定義 6. 予測子の損失の（条件付き）期待値を与える関数を**危険（リスク）関数**という．

注 5. $\hat{Y}_{t+h|t}$ の危険関数は

$$R\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) := \mathrm{E}_t\left(L\left(Y_{t+h}, \hat{Y}_{t+h|t}\right)\right)$$

定義 7. 予測誤差の 2 乗の（条件付き）期待値を予測子の**平均 *2* 乗誤差**（*mean squared error, MSE*）という．

注 6. $\hat{Y}_{t+h|t}$ の MSE は

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) := \mathrm{E}_t\left(\left(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}\right)^2\right)$$

すなわち MSE = 2 次の損失の危険関数.

1.4　最適予測

危険関数が最小の予測子が最適．したがって最適予測は損失関数に依存する．2 次の損失なら MSE が最小の予測子が最適．時点 t までの観測値を所与とした条件付き分散を $\mathrm{var}_t(.)$ と書く．

定理 1.

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) = \mathrm{var}_t(Y_{t+h}) + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2$$

証明.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) \\
&= \mathrm{E}_t\left(\left(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}\right)^2\right) \\
&= \mathrm{E}_t\left(\left(Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}) - \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)\right)^2\right) \\
&= \mathrm{E}_t\left((Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))^2\right) \\
&\quad - 2\,\mathrm{E}_t\left((Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)\right) \\
&\quad + \mathrm{E}_t\left(\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2\right) \\
&= \mathrm{var}_t(Y_{t+h}) \\
&\quad - 2(\mathrm{E}_t(Y_{t+h}) - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right) \\
&\quad + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2
\end{aligned}$$

第 2 項は 0. □

注 7. すなわち MSE =条件付き分散＋予測子の偏りの 2 乗.

系 1. $\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right)$ は $\hat{Y}_{t+h|t} = \mathrm{E}_t(Y_{t+h})$ のとき $\mathrm{var}_t(Y_{t+h})$ で最小.

証明. 前定理より明らか. □

注 8. すなわち 2 次の損失なら条件付き期待値が最適予測.

2　AR(1) 過程の予測

2.1　1 期先予測

簡単化のため $\{y_t\}$ を定数項なしの AR(1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

簡単化のため母数は既知と仮定する．

定理 2. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = \phi y_t$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(\phi y_t + w_{t+1}) \\
&= \phi y_t + \mathrm{E}_t(w_{t+1})
\end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{E}_t(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_t) = 0$$

□

注 9. $\mathrm{E}_t(y_{t+1})$ は点予測を与える.

定理 3. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \sigma^2$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(\phi y_t + w_{t+1}) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1})
\end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{var}_t(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_t) = \sigma^2$$

□

注 10. 正規過程なら $\mathrm{var}_t(y_{t+1})$ から区間予測（＝予測の信頼区間）を作成できる．ただし本来は母数の推定誤差も考慮する必要がある．

2.2 h 期先予測

補題 1. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$y_{t+h} = w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1} + \phi^h y_t$$

証明.

$$\begin{aligned} y_{t+h} &= \phi y_{t+h-1} + w_{t+h} \\ &= w_{t+h} + \phi y_{t+h-1} \\ &= w_{t+h} + \phi(w_{t+h-1} + \phi y_{t+h-2}) \\ &= w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \phi^2 y_{t+h-2} \\ &= \cdots \\ &= w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1} + \phi^h y_t \end{aligned}$$

□

定理 4. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+h}) = \phi^h y_t$$

証明. 補題より

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_t(y_{t+h}) \\ &= \mathrm{E}_t\left(w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1} + \phi^h y_t\right) \\ &= \mathrm{E}_t(w_{t+h}) + \phi\,\mathrm{E}_t(w_{t+h-1}) + \cdots \\ &\quad + \phi^{h-1}\,\mathrm{E}_t(w_{t+1}) + \phi^h y_t \end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{E}_t(w_{t+h}) = \cdots = \mathrm{E}_t(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_t) = 0$$

□

定理 5. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+h}) = \left[1 + \phi^2 + \cdots + \phi^{2(h-1)}\right]\sigma^2$$

証明. 補題より

$$\begin{aligned} &\mathrm{var}_t(y_{t+h}) \\ &= \mathrm{var}_t\left(w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1} + \phi^h y_t\right) \\ &= \mathrm{var}_t\left(w_{t+h} + \phi w_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1} w_{t+1}\right) \\ &= \mathrm{var}_t(w_{t+h}) + \mathrm{var}_t(\phi w_{t+h-1}) + \cdots \\ &\quad + \mathrm{var}_t\left(\phi^{h-1} w_{t+1}\right) \\ &= \mathrm{var}_t(w_{t+h}) + \phi^2\,\mathrm{var}_t(w_{t+h-1}) + \cdots \\ &\quad + \phi^{2(h-1)}\,\mathrm{var}_t(w_{t+1}) \end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{var}_t(w_{t+h}) = \cdots = \mathrm{var}_t(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_t) = \sigma^2$$

□

3 $\mathrm{AR}(p)$ 過程の予測

3.1 1 期先予測

$\{y_t\}$ を定数項なしの $\mathrm{AR}(p)$ 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right) \end{aligned}$$

定理 6. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1}$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(\phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1} + w_{t+1}) \\ &= \phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1} + \mathrm{E}_t(w_{t+1}) \end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{E}_t(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_t) = 0$$

□

定理 7. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \sigma^2$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(\phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+1} + w_{t+1}) \\ &= \mathrm{var}_t(w_{t+1}) \end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{var}_t(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_t) = \sigma^2$$

□

3.2　h 期先予測

簡単化のため $p=2$ とする．すなわち任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

簡単化のため $h=2$ とする．

定理 8. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$
\mathrm{E}_t(y_{t+2}) = \left(\phi_1^2 + \phi_2\right) y_t + \phi_1 \phi_2 y_{t-1}
$$

証明. $\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1}$ より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+2}) &= \mathrm{E}_t(\phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + w_{t+2}) \\
&= \phi_1 \mathrm{E}_t(y_{t+1}) + \phi_2 y_t + \mathrm{E}_t(w_{t+2}) \\
&= \phi_1(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1}) + \phi_2 y_t + \mathrm{E}(w_{t+2}) \\
&= \left(\phi_1^2 + \phi_2\right) y_t + \phi_1 \phi_2 y_{t-1}
\end{aligned}
$$

□

定理 9. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$
\mathrm{var}_t(y_{t+2}) = \left(1 + \phi_1^2\right) \sigma^2
$$

証明. $\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \sigma^2$ より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+2}) &= \mathrm{var}_t(\phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + w_{t+2}) \\
&= \mathrm{var}_t(\phi_1 y_{t+1} + w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2 \mathrm{var}_t(y_{t+1}) + \mathrm{var}_t(w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2 \sigma^2 + \mathrm{var}(w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2 \sigma^2 + \sigma^2 \\
&= \left(1 + \phi_1^2\right) \sigma^2
\end{aligned}
$$

□

注 11. $p, h \geq 3$ の場合も同様だが，かなり複雑．ベクトル・行列を用いると簡単になる．

4　MA・ARMA 過程の予測

反転可能な MA・ARMA 過程は $\mathrm{AR}(\infty)$ で表現できる．したがって母数が既知なら $\{y_t\}$ から $\{w_t\}$ が一意に定まり，$\{w_t\}$ も観測可能とみなせる．

$\{y_t\}$ を平均 0 の MA(1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= w_t - \theta w_{t-1} \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

定理 10. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = -\theta w_t
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(w_{t+1} - \theta w_t) \\
&= \mathrm{E}_t(w_{t+1}) - \theta w_t
\end{aligned}
$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$
\mathrm{E}_t(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_t) = 0
$$

□

定理 11. $\{w_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) = \sigma^2
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(w_{t+1} - \theta w_t) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1})
\end{aligned}
$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$
\mathrm{var}_t(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_t) = \sigma^2
$$

□

注 12. より高次の MA 過程や ARMA 過程の h 期先予測の場合も同様だが，かなり複雑．ベクトル・行列を用いると簡単になるが，実際は母数は未知で $\{w_t\}$ は観測不可能なので，正確な計算には状態空間モデルとカルマン・フィルターが必要.

5　今日のキーワード

予測子，予測値，損失関数，2 次の損失関数，予測誤差，危険（リスク）関数，平均 2 乗誤差（MSE）

6　次回までの準備

提出　宿題 6

復習　復習テスト 6

予習　教科書第 7 章 4.1 節