第 7 回　多変量時系列モデルの定式化と推定（7.4.1）

村澤 康友

2023 年 11 月 6 日

今日のポイント

1. 試行の結果によって値が決まる N 次元ベクトルの列を N 変量確率過程という．
2. $\mathrm{cov}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$ を $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の s 次の自己共分散行列という．$\{\boldsymbol{y}_t\}$ の自己共分散行列関数は，任意の時点差 s について $\boldsymbol{\Gamma}(s) := \mathrm{cov}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$．
3. p 次の VAR 過程は，任意の t について $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{w}_t$．ただし $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})$ はラグ多項式で $\{\boldsymbol{w}_t\}$ は WN.
4. VAR モデルは各式を OLS 推定する．共通のラグ次数 p はモデル選択基準（AIC・SBIC・HQC）で選ぶ.

目次

1　行列

1.1　行列とベクトル

定義 1. $m \times n$ **行列**は

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

注 1. $\boldsymbol{A} := [a_{i,j}]$ とも書く.

定義 2. $1 \times n$ 行列を（n **次元**）**行ベクトル**という.

定義 3. $n \times 1$ 行列を（n **次元**）**列ベクトル**という.

1.2　ベクトルの内積

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を n 次元列ベクトルとする.

定義 4. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**内積**は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

注 2. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}$ とも書く.

1.3 行列の演算

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を行列とする.

定義 5. $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の各 (i, j) 成分について $a_{i,j} = b_{i,j}$ なら $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は **等しい** という.

定義 6. $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の**和**は

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} := [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

定義 7. スカラー α と $\boldsymbol{A}$ の**スカラー積**は

$$\alpha\boldsymbol{A} := [\alpha a_{i,j}]$$

定義 8. $l \times m$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{B}$ の**積**は

$$\boldsymbol{AB} := [(\boldsymbol{a}_{i,\cdot}, \boldsymbol{b}_{\cdot,j})]$$

注 3. 一般に $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. そもそも $l \neq n$ なら $\boldsymbol{BA}$ は定義できない.

定義 9. $\boldsymbol{A}$ の**転置**は

$$\boldsymbol{A}' := [a_{j,i}]$$

定理 1.

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$$
$$(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$$

証明. 省略. □

1.4 行列と連立 1 次方程式

n 個の未知変数 $x_1, \dots, x_n$ をもつ m 本の連立 1 次方程式は

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

次の行列・ベクトルを定義する.

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

連立 1 次方程式は

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

1.5 正方行列

定義 10. $n \times n$ 行列を n **次正方行列**という.

定義 11. (n 次) **単位行列**は

$$\boldsymbol{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

2 確率ベクトル

2.1 平均ベクトル

$\boldsymbol{x}$ を n 次元確率ベクトルとする.

定義 12. $\boldsymbol{x}$ の**平均ベクトル**は

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \mathrm{E}(x_1) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(x_n) \end{pmatrix}$$

定理 2 (期待値の線形性)**.** 任意の $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ について

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}) &= \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,\cdot}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m,\cdot}\boldsymbol{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,\cdot}\boldsymbol{x} + b_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m,\cdot}\boldsymbol{x} + b_m \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{E}(\boldsymbol{a}_{1,\cdot}\boldsymbol{x} + b_1) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(\boldsymbol{a}_{m,\cdot}\boldsymbol{x} + b_m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,\cdot}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) + b_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m,\cdot}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) + b_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1,\cdot}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m,\cdot}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{A}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

□

2.2　分散共分散行列

定義 13. $\boldsymbol{x}$ の**分散共分散行列**は

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{x}) := \mathrm{E}((\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))')$$

注 4. $\mathrm{var}(\boldsymbol{x})$ の (i, j) 成分は $\mathrm{cov}(x_i, x_j)$.

定理 3. 任意の $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ について

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{var}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}'$$

証明.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}) \\
&:= \mathrm{E}((\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b} - \mathrm{E}(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}))(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b} - \mathrm{E}(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}))') \\
&= \mathrm{E}((\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{A}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{A}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}))') \\
&= \mathrm{E}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))]') \\
&= \mathrm{E}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))'\boldsymbol{A}') \\
&= \boldsymbol{A}\,\mathrm{E}((\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))')\boldsymbol{A}' \\
&= \boldsymbol{A}\,\mathrm{var}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}'
\end{aligned}$$

□

2.3　相関係数行列

定義 14. 確率ベクトルの各変量を標準化することを確率ベクトルの**標準化**という.

定義 15. 標準化した確率ベクトルの分散共分散行列を**相関係数行列**という.

2.4　相互共分散と相互相関

$\boldsymbol{x}$ を m 次元確率ベクトル, $\boldsymbol{y}$ を n 次元確率ベクトルとする.

定義 16. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**相互共分散行列**は

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \mathrm{E}((\boldsymbol{x} - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y} - \mathrm{E}(\boldsymbol{y}))')$$

定義 17. 標準化した確率ベクトルの相互共分散行列を**相互相関行列**という.

注 5. $\mathrm{corr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と書く.

3　VAR 過程

3.1　多変量確率過程

定義 18. 試行の結果によって値が決まる N 次元ベクトルの列を **N 変量確率過程**という.

注 6. すなわち $\{\boldsymbol{y}_t\} : \Omega \to \mathbb{R}^{N \times \infty}$. 確率変数・確率ベクトル・(1 変量) 確率過程と同様に, 起こりうる結果に対して確率を定義できる.

3.2　共分散定常性

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ を N 変量確率過程とする.

定義 19. 任意の時点 t と時点差 s について $\mathrm{E}(\boldsymbol{y}_t)$ と $\mathrm{cov}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$ が t に依存しないなら $\{\boldsymbol{y}_t\}$ は**共分散（弱）定常**という.

注 7. I(0) と書く.

3.3　自己共分散行列と自己相関行列

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ を N 変量 I(0) 過程とする.

定義 20. $\mathrm{cov}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$ を $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の **s 次の自己共分散行列**という.

定義 21. $\mathrm{corr}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$ を $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の **s 次の自己相関行列**という.

定義 22. $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の**自己共分散行列関数**は, 任意の時点差 s について

$$\boldsymbol{\Gamma}(s) := \mathrm{cov}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$$

定義 23. $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の**自己相関行列関数**は, 任意の時点差 s について

$$\boldsymbol{P}(s) := \mathrm{corr}(\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-s})$$

定義 24. ある $s \neq 0$ について $\boldsymbol{P}(s) \neq \mathbf{O}$ であることを**系列相関**という.

定義 25. 平均 $\mathbf{0}$ で系列相関のない I(0) 過程を**ホワイト・ノイズ**という.

注 8. 分散共分散行列が $\boldsymbol{\Sigma}$ なら $\mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$ と書く.

3.4　VAR(1) 過程（p. 224）

定義 26. ***1* 次のベクトル *AR*（*vector AR, VAR*）過程**は, 任意の t について

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{w}_t \\
\{\boldsymbol{w}_t\} &\sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})
\end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L}) := \boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{\Phi}\mathrm{L}$.

注 9. VAR(1) と書く.

注 10. すなわち任意の t について

$$\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{w}_t$$

平均 $\boldsymbol{0}$ の 2 変量 VAR(1) 過程なら，任意の t について

$$\begin{pmatrix} y_{t,1} \\ y_{t,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1,1} \\ y_{t-1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{t,1} \\ w_{t,2} \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{aligned} y_{t,1} &= \phi_{1,1} y_{t-1,1} + \phi_{1,2} y_{t-1,2} + w_{t,1} \\ y_{t,2} &= \phi_{2,1} y_{t-1,1} + \phi_{2,2} y_{t-1,2} + w_{t,2} \end{aligned}$$

3.5 VAR(p) 過程（p. 225）

定義 27. *p 次の VAR 過程*は，任意の t について

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{w}_t \\ \{\boldsymbol{w}_t\} &\sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma}) \end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L}) := \boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{\Phi}_1 \mathrm{L} - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p \mathrm{L}$.

注 11. VAR(p) と書く．

注 12. 以下のベクトルを定義する．

$$\boldsymbol{s}_t := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_t := \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_t \\ \boldsymbol{0}_{(p-1)N} \end{pmatrix}$$

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ の VAR(p) モデルは $\{\boldsymbol{s}_t\}$ の VAR(1) モデルで表現できる．すなわち任意の t について

$$\boldsymbol{s}_t = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{s}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t$$

ただし

$$\boldsymbol{\Phi} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \dots & \boldsymbol{\Phi}_{p-1} & \boldsymbol{\Phi}_p \\ & \boldsymbol{I}_{(p-1)N} & & \mathbf{O}_{(p-1)N \times N} \end{bmatrix}$$

注 13. VARMA 過程にも拡張できるが，MA 部分の係数が一意に定まらず，推定も煩雑なのであまり使わない．

4 VAR 予測

4.1 VAR モデルの推定（p. 225）

正規 VAR モデルの厳密な ML 推定は煩雑なので，条件つき ML 推定（＝各式の OLS 推定）が普通．OLS 推定量は不偏でなく漸近有効でもないが，正規分布の仮定は不要．

4.2 次数選択

VAR モデルの次数 p はモデル選択基準（AIC・SBIC・HQC）で選ぶ．通常は各式に同じ次数を仮定する．

4.3 最適予測

最適予測は損失関数に依存する．2 次の損失なら条件付き期待値が最適予測．

4.4 1 期先予測

簡単化のため $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を定数項なしの VAR(1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t \\ \{\boldsymbol{w}_t\} &\sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma}) \end{aligned}$$

簡単化のため母数は既知と仮定する．時点 t までの観測値を所与とした条件付き期待値を $\mathrm{E}_t(.)$，条件付き分散を $\mathrm{var}_t(.)$ と書く．

定理 4. $\{\boldsymbol{w}_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$\mathrm{E}_t(\boldsymbol{y}_{t+1}) = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y}_t$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t(\boldsymbol{y}_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{w}_{t+1}) \\ &= \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y}_t + \mathrm{E}_t(\boldsymbol{w}_{t+1}) \end{aligned}$$

$\{\boldsymbol{w}_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{E}_t(\boldsymbol{w}_{t+1}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{w}_{t+1}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{w}_t) = \boldsymbol{0}$$

□

定理 5. $\{\boldsymbol{w}_t\}$ が *iid* なら任意の t について

$$\mathrm{var}_t(\boldsymbol{y}_{t+1}) = \boldsymbol{\Sigma}$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_t(\boldsymbol{y}_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{w}_{t+1}) \\ &= \mathrm{var}_t(\boldsymbol{w}_{t+1}) \end{aligned}$$

$\{\boldsymbol{w}_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{var}_t(\boldsymbol{w}_{t+1}) = \mathrm{var}(\boldsymbol{w}_{t+1}) = \mathrm{var}(\boldsymbol{w}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$$

□

4.5　h 期先予測

補題 1. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\boldsymbol{y}_{t+h} = \boldsymbol{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t+h-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\boldsymbol{w}_{t+1} + \boldsymbol{\Phi}^{h}\boldsymbol{y}_t$$

証明.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_{t+h} &= \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t+h-1} + \boldsymbol{w}_{t+h} \\
&= \boldsymbol{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t+h-1} \\
&= \boldsymbol{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{w}_{t+h-1} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t+h-2}) \\
&= \boldsymbol{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t+h-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{y}_{t+h-2} \\
&= \dots \\
&= \boldsymbol{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t+h-1} + \cdots \\
&\quad + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\boldsymbol{w}_{t+1} + \boldsymbol{\Phi}^{h}\boldsymbol{y}_t
\end{aligned}$$

□

定理 6. $\{\boldsymbol{w}_t\}$ が *iid* なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{E}_t(\boldsymbol{y}_{t+h}) = \boldsymbol{\Phi}^{h}\boldsymbol{y}_t$$

証明. 補題より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_t(\boldsymbol{y}_{t+h}) \\
&= \mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t+h-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\boldsymbol{w}_{t+1} + \boldsymbol{\Phi}^{h}\boldsymbol{y}_t\right) \\
&= \mathrm{E}_t(\boldsymbol{w}_{t+h}) + \boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{E}_t(\boldsymbol{w}_{t+h-1}) + \cdots \\
&\quad + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\,\mathrm{E}_t(\boldsymbol{w}_{t+1}) + \boldsymbol{\Phi}^{h}\boldsymbol{y}_t
\end{aligned}$$

$\{\boldsymbol{w}_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{E}_t(\boldsymbol{w}_{t+h}) = \cdots = \mathrm{E}_t(\boldsymbol{w}_{t+1}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{w}_t) = \boldsymbol{0}$$

□

定理 7. $\{\boldsymbol{w}_t\}$ が *iid* なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{var}_t(\boldsymbol{y}_{t+h}) = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Phi}' + \cdots + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Phi}^{h-1\prime}$$

証明. 補題より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}_t(\boldsymbol{y}_{t+h}) \\
&= \mathrm{var}_t\left(\boldsymbol{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t+h-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\boldsymbol{w}_{t+1} + \boldsymbol{\Phi}^{h}\boldsymbol{y}_t\right) \\
&= \mathrm{var}_t\left(\boldsymbol{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t+h-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\boldsymbol{w}_{t+1}\right) \\
&= \mathrm{var}_t(\boldsymbol{w}_{t+h}) + \mathrm{var}_t(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t+h-1}) + \cdots \\
&\quad + \mathrm{var}_t\left(\boldsymbol{\Phi}^{h-1}\boldsymbol{w}_{t+1}\right) \\
&= \mathrm{var}_t(\boldsymbol{w}_{t+h}) + \boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{var}_t(w_{t+h-1})\boldsymbol{\Phi}' + \cdots \\
&\quad + \boldsymbol{\Phi}^{h-1}\,\mathrm{var}_t(w_{t+1})\boldsymbol{\Phi}^{h-1\prime}
\end{aligned}$$

$\{\boldsymbol{w}_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{var}_t(\boldsymbol{w}_{t+h}) = \cdots = \mathrm{var}_t(\boldsymbol{w}_{t+1}) = \mathrm{var}(\boldsymbol{w}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$$

□

5　今日のキーワード

行列，行ベクトル，列ベクトル，内積，（行列が）等しい，（行列の）和，スカラー積，（行列の）積，転置，正方行列，単位行列，平均ベクトル，分散共分散行列，標準化，相関係数行列，相互共分散行列，相互相関行列，N 変量確率過程，共分散（弱）定常，自己共分散行列，自己相関行列，自己共分散行列関数，自己相関行列関数，系列相関，ホワイト・ノイズ，ベクトル AR（VAR）過程

6　次回までの準備

提出　宿題 7

復習　教科書第 7 章 4.1 節，復習テスト 7

予習　教科書第 7 章 4.2–4.4 節