

第8回 VAR 分析 (7.4.2–7.4.4)

村澤 康友

2023年11月13日

今日のポイント

1. $\{x_t\}$ が $\{y_t\}$ の予測に役立つなら $\{x_t\}$ から $\{y_t\}$ にグレンジャー因果ありという。VAR(p) モデルの $\{y_t\}$ の予測式における x_{t-1}, \dots, x_{t-p} の係数=0 の帰無仮説の F 検定を $\{x_t\}$ から $\{y_t\}$ へのグレンジャー因果検定という。
2. $\{y_t\}$ の構造 VMA 表現は、任意の t について $y_t = \mu + B_0 z_t + B_1 z_{t-1} + \dots$ 。ただし $\{z_t\} \sim WN(I_N)$ は構造ショック。 $\{B_s\}$ の (i, j) 成分を $\{y_{t,i}\}$ の $\{y_{t,j}\}$ に対するインパルス応答関数という。
3. 推定した VAR モデルを VMA に反転して予測誤差を直交化すると、構造 VMA 表現とインパルス応答関数が得られる。ただし変数の並び順で結果が変わる。
4. 予測誤差分散分解の相対分散寄与率は、 h 期先予測誤差分散 $\text{var}_t(y_{t+h,i})$ に対する各構造ショックの寄与率を表す。

3.3	インパルス応答関数	3
3.4	コレスキー分解	3
3.5	予測誤差の直交化	3
4	予測誤差分散分解 (p. 227)	4
4.1	h 期先予測誤差	4
4.2	予測誤差分散分解	4
4.3	相対分散寄与率	4
5	今日のキーワード	6
6	次回までの準備	6

1 逆行列

A を n 次正方行列とする。

定義 1. $AB = BA = I_n$ となる B を A の逆行列という。

注 1. A の逆行列を A^{-1} と書く。

注 2. 連立 1 次方程式 $Ax = b$ の解は $x = A^{-1}b$ 。

定義 2. 逆行列をもつ行列を正則 (可逆) という。

定義 3. 逆行列をもたない行列を特異という。

目次

1	逆行列	1
2	グレンジャー因果 (p. 225)	1
2.1	グレンジャー因果	1
2.2	グレンジャー因果検定	2
3	インパルス応答関数 (p. 226)	2
3.1	構造形と誘導形	2
3.2	構造 VAR と構造 VMA	2

2 グレンジャー因果 (p. 225)

2.1 グレンジャー因果

2 変量 $I(0)$ 過程 $\{(x_t, y_t)'\}$ の予測を考える。時点 t で観測可能な情報を I_t とし、 $E_t(\cdot) := E(\cdot | I_t)$ とする。また I_t から $\{x_t\}$ を除くことを $I_t \setminus \{x_t\}$ と表す。2 次の損失なら最適予測 = 条件付き期待値なので、任意の $h \geq 1$ について

$$\text{MSE}(E(y_{t+h} | I_t \setminus \{x_t\})) \geq \text{MSE}(E_t(y_{t+h}))$$

定義 4. 任意の $h \geq 1$ について

$$\text{MSE}(E(y_{t+h}|I_t \setminus \{x_t\})) = \text{MSE}(E_t(y_{t+h}))$$

なら $\{x_t\}$ から $\{y_t\}$ にグレンジャー因果なしという。

注 3. すなわち $\{x_t\}$ は $\{y_t\}$ の予測に役立たない。

定義 5. ある $h \geq 1$ について

$$\text{MSE}(E(y_{t+h}|I_t \setminus \{x_t\})) > \text{MSE}(E_t(y_{t+h}))$$

なら $\{x_t\}$ から $\{y_t\}$ にグレンジャー因果ありという。

注 4. $\{x_t\}$ が $\{y_t\}$ の予測に役立つことを因果関係と解釈する。ただし本当に $\{x_t\}$ が原因で $\{y_t\}$ が結果とは限らない。双方向のグレンジャー因果が同時に成立することも可能。

注 5. 3 変量以上の $I(0)$ 過程における 2 変数間のグレンジャー因果も同様に定義。

2.2 グレンジャー因果検定

$\{(x_t, y_t)'\}$ を平均 $\mathbf{0}$ の 2 変量正規 $\text{VAR}(p)$ 過程とする。すなわち任意の t について

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(L) & \phi_{xy}(L) \\ \phi_{yx}(L) & \phi_{yy}(L) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \right\} \sim \text{IN}(\mathbf{0}, \Sigma)$$

各変数の予測式は、任意の t について

$$\phi_{xx}(L)x_t + \phi_{xy}(L)y_t = u_t$$

$$\phi_{yx}(L)x_t + \phi_{yy}(L)y_t = v_t$$

すなわち

$$x_t = \sum_{s=1}^p \phi_{xx,s} x_{t-s} + \sum_{s=1}^p \phi_{xy,s} y_{t-s} + u_t$$

$$y_t = \sum_{s=1}^p \phi_{yx,s} x_{t-s} + \sum_{s=1}^p \phi_{yy,s} y_{t-s} + v_t$$

したがって

1. $\phi_{xy}(\cdot) \neq 0 \implies \{y_t\}$ から $\{x_t\}$ にグレンジャー因果あり

2. $\phi_{yx}(\cdot) \neq 0 \implies \{x_t\}$ から $\{y_t\}$ にグレンジャー因果あり

定義 6. $\text{VAR}(p)$ モデルの $\{y_t\}$ の予測式における x_{t-1}, \dots, x_{t-p} の係数=0 の帰無仮説の F 検定を $\{x_t\}$ から $\{y_t\}$ へのグレンジャー因果検定という。

注 6. VAR モデルの各式は古典的線形回帰モデルでなく、F 検定統計量は H_0 の下で厳密には F 分布に従わないが、近似的な検定として正当化できる。

注 7. 3 変量 VAR モデルにおける 2 変数間のグレンジャー因果検定も同様。ただし変数を増やすと結果が変わり得る。

3 インパルス応答関数 (p. 226)

3.1 構造形と誘導形

定義 7. 変数間の理論的な関係を表した連立方程式を構造形という。

定義 8. 内生変数について構造形を解いた式を誘導形という。

注 8. 構造形から誘導形は一意に定まる。逆は一般に成立しない。

注 9. 誘導形は OLS で一致推定できる。構造形は内生性バイアスのため一般に OLS で一致推定できない。

3.2 構造 VAR と構造 VMA

$\{y_t\}$ を N 変量 $I(0)$ 過程とする。

定義 9. p 次の構造 VAR モデルは、任意の t について

$$\mathbf{A}(L)(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{z}_t$$

$$\{\mathbf{z}_t\} \sim \text{WN}(\mathbf{I}_N)$$

ただし $\mathbf{A}(L) := \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 L - \dots - \mathbf{A}_p L^p$ で \mathbf{A}_0 は正則。

注 10. ラグ多項式を使わずに書くと、任意の t について

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \dots$$

$$+ \mathbf{A}_p(\mathbf{y}_{t-p} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{z}_t$$

誘導形は、任意の t について

$$\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 (\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \cdots \\ + \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_p (\mathbf{y}_{t-p} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{z}_t$$

注 11. \mathbf{z}_t の各成分は互いに無相関な構造ショック。構造ショックの分散を 1 に基準化する代わりに、 \mathbf{A}_0 の対角成分を 1 に基準化してもよい。

定義 10. q 次の構造 VMA モデルは、任意の t について

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}(L) \mathbf{z}_t \\ \{\mathbf{z}_t\} \sim \text{WN}(\mathbf{I}_N)$$

ただし $\mathbf{B}(L) := \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 L + \cdots + \mathbf{B}_q L^q$.

注 12. $\{\mathbf{y}_t\}$ が $I(0)$ なら構造 VAR モデルは構造 VMA で表現できる。例えば平均 $\mathbf{0}$ の構造 VAR(1) なら、任意の t について

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{z}_t$$

誘導形にして反転すると、任意の t について

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{z}_t \\ = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{z}_t + \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} \\ = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{z}_t + \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-2}) \\ = \cdots \\ = \sum_{s=0}^{\infty} (\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1)^s \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{z}_{t-s}$$

3.3 インパルス応答関数

$\{\mathbf{y}_t\}$ の構造 VMA 表現は、任意の t について

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_t + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_{t-1} + \cdots$$

したがって任意の t と $s \geq 0$ について

$$\mathbf{y}_{t+s} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_{t+s} + \cdots + \mathbf{B}_s \mathbf{z}_t + \cdots$$

定義 11. $\{\mathbf{B}_s\}$ の (i, j) 成分を $\{y_{t,i}\}$ の $\{y_{t,j}\}$ に対するインパルス応答関数という。

注 13. $y_{t,j}$ に対する構造ショック $z_{t,j}$ の 1 単位の増加の各変数への波及効果を表す。

3.4 コレスキー分解

\mathbf{A} を n 次正方行列、 \mathbf{x} を n 次元ベクトルとする。

定義 12. $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ なら \mathbf{A} は対称という。

定義 13. 任意の \mathbf{x} について $\mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ なら \mathbf{A} は正定値という。

定義 14. 対角成分より右上の成分がすべて 0 なら \mathbf{A} は下三角という。

定理 1 (コレスキー分解). \mathbf{A} が対称で正定値なら対角成分が正の下三角行列 \mathbf{L} を用いて $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}'$ と一意に分解できる。

注 14. \mathbf{A} は対称、 \mathbf{L} は下三角なので、どちらも独立な成分は $n(n+1)/2$ 個。

3.5 予測誤差の直交化

誘導形 VAR モデルの VMA 表現は、任意の t について

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{w}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{w}_{t-1} + \cdots \\ \{\mathbf{w}_t\} \sim \text{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

分散共分散行列は対称で正定値なので $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L} \mathbf{L}'$ とコレスキー分解し、 $\mathbf{z}_t := \mathbf{L}^{-1} \mathbf{w}_t$ とする。

補題 1.

$$\text{var}(\mathbf{z}_t) = \mathbf{I}_N$$

証明.

$$\text{var}(\mathbf{z}_t) = \text{var}(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{w}_t) \\ = \mathbf{L}^{-1} \text{var}(\mathbf{w}_t) \mathbf{L}^{-1'} \\ = \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{L}^{-1'} \\ = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{L}' \mathbf{L}^{-1'} \\ = \mathbf{L}' \mathbf{L}^{-1'} \\ = (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{L})' \\ = \mathbf{I}_N$$

□

定理 2. 任意の t について

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L} \mathbf{z}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{L} \mathbf{z}_{t-1} + \cdots \\ \{\mathbf{z}_t\} \sim \text{WN}(\mathbf{I}_N)$$

証明. $w_t = Lz_t$ より明らか. □

注 15. $\{\Psi_s L\}$ の各成分はインパルス応答関数と解釈できる. ただしインパルス応答関数は変数の並び順で変わる. $w_t = Lz_t$ で L は下三角なので, 例えば $y_{t,1}$ は $z_{t,1}$ しか含まないが, $y_{t,N}$ は $z_{t,1}, \dots, z_{t,N}$ を含む. したがって先に決まる変数から (例えばグレンジャー因果の順に) 並べる.

例 1. 旧西ドイツのマクロの所得・消費 (対数階差) の 1960 年第 1 四半期~1982 年第 4 四半期の季節調整済みデータから推定した 2 変量 VAR(4) モデルに基づくインパルス応答関数 (図 1). 変数の並び順を変えると結果が変わる (図 2).

4 予測誤差分散分解 (p. 227)

4.1 h 期先予測誤差

$\{y_t\}$ の構造 VMA 表現は, 任意の t について

$$y_t = \mu + B_0 z_t + B_1 z_{t-1} + \dots$$

$$\{z_t\} \sim \text{WN}(I_N)$$

補題 2. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$y_{t+h} - E_t(y_{t+h}) = B_0 z_{t+h} + \dots + B_{h-1} z_{t+1}$$

証明. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$y_{t+h} = \mu + B_0 z_{t+h} + \dots + B_h z_t + \dots$$

したがって h 期先予測は

$$E_t(y_{t+h}) = \mu + B_h z_t + \dots$$

2 つの差より結果が得られる. □

定理 3. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\text{var}_t(y_{t+h}) = B_0 B_0' + \dots + B_{h-1} B_{h-1}'$$

証明. $\{z_t\} \sim \text{WN}(I_N)$ なので, 前補題より

$$\begin{aligned} \text{var}_t(y_{t+h}) &= \text{var}_t(y_{t+h} - E_t(y_{t+h})) \\ &= \text{var}_t(B_0 z_{t+h} + \dots + B_{h-1} z_{t+1}) \\ &= \text{var}_t(B_0 z_{t+h}) + \dots + \text{var}_t(B_{h-1} z_{t+1}) \\ &= B_0 \text{var}_t(z_{t+h}) B_0' + \dots + B_{h-1} \text{var}_t(z_{t+1}) B_{h-1}' \\ &= B_0 \text{var}(z_{t+h}) B_0' + \dots + B_{h-1} \text{var}(z_{t+1}) B_{h-1}' \\ &= B_0 B_0' + \dots + B_{h-1} B_{h-1}' \end{aligned}$$

4.2 予測誤差分散分解

h 期先予測誤差分散 $\text{var}_t(y_{t+h,i})$ を各変数の構造ショックに要因分解したい. B_s の第 i 行を $b_{s,(i,\cdot)}$, (i, j) 成分を $b_{s,(i,j)}$ と表す. I_N の第 i 列を e_i とする.

定理 4. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\text{var}_t(y_{t+h,i}) = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{h-1} b_{s,(i,j)}^2$$

証明. 任意の t と $h \geq 1$ について $y_{t+h,i} = e_i' y_{t+h}$ なので, 前定理より

$$\begin{aligned} \text{var}_t(y_{t+h,i}) &= \text{var}_t(e_i' y_{t+h}) \\ &= e_i' \text{var}_t(y_{t+h}) e_i \\ &= e_i' (B_0 B_0' + \dots + B_{h-1} B_{h-1}') e_i \\ &= e_i' B_0 B_0' e_i + \dots + e_i' B_{h-1} B_{h-1}' e_i \\ &= b_{0,(i,\cdot)} b_{0,(i,\cdot)}' + \dots + b_{h-1,(i,\cdot)} b_{h-1,(i,\cdot)}' \\ &= \sum_{j=1}^N b_{0,(i,j)}^2 + \dots + \sum_{j=1}^N b_{h-1,(i,j)}^2 \\ &= \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{j=1}^N b_{s,(i,j)}^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{h-1} b_{s,(i,j)}^2 \end{aligned}$$

□

定義 15. $\{y_{t,i}\}$ の h 期先予測誤差分散分解 (Forecast Error Variance Decomposition, FEVD) は

$$\text{var}_t(y_{t+h,i}) = \sum_{s=0}^{h-1} b_{s,(i,1)}^2 + \dots + \sum_{s=0}^{h-1} b_{s,(i,N)}^2$$

4.3 相対分散寄与率

定義 16. $\text{var}_t(y_{t+h,i})$ に対する $\{y_{t,j}\}$ の構造ショックの相対分散寄与率 (Relative Variance Contribution, RVC) は

$$\text{RVC}_{i,j}(h) := \frac{\sum_{s=0}^{h-1} b_{s,(i,j)}^2}{\sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{h-1} b_{s,(i,j)}^2}$$

例 2. 旧西ドイツのマクロの所得・消費 (対数階差) の 1960 年第 1 四半期~1982 年第 4 四半期の季節

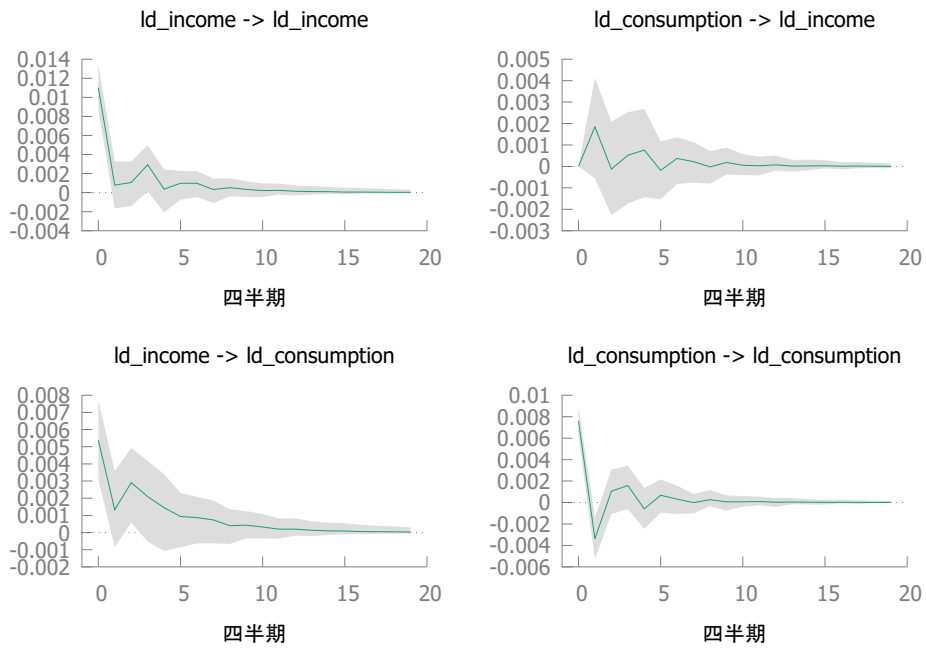


図1 所得・消費（対数階差）のインパルス応答関数と95%信頼区間（所得・消費の順）

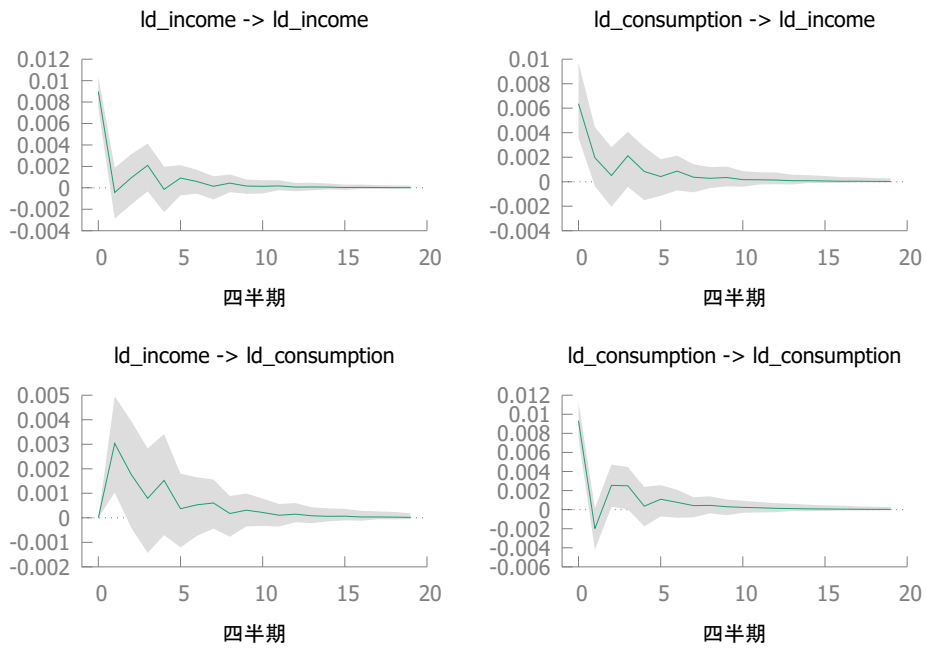


図2 所得・消費（対数階差）のインパルス応答関数と95%信頼区間（消費・所得の順）

調整済みデータから推定した 2 変量 VAR(4) モデルに基づく両変数の予測誤差分散分解 (図 3, 4)

5 今日のキーワード

逆行列, 正則 (可逆), 特異, グレンジャー因果なし, グレンジャー因果あり, グレンジャー因果検定, 構造形, 誘導形, 構造 VAR モデル, 構造 VMA モデル, インパルス応答関数, 対称, 正定値, 下三角, コレスキー分解, 予測誤差分散分解, 相対分散寄与率

6 次回までの準備

提出 宿題 8

復習 教科書第 7 章 4.2-4.4 節, 復習テスト 8

試験 (1) 教科書を読む (2) 用語の定義を覚える (3) 復習テストを自力で解く (4) 宿題で作成した図表の意味を理解する

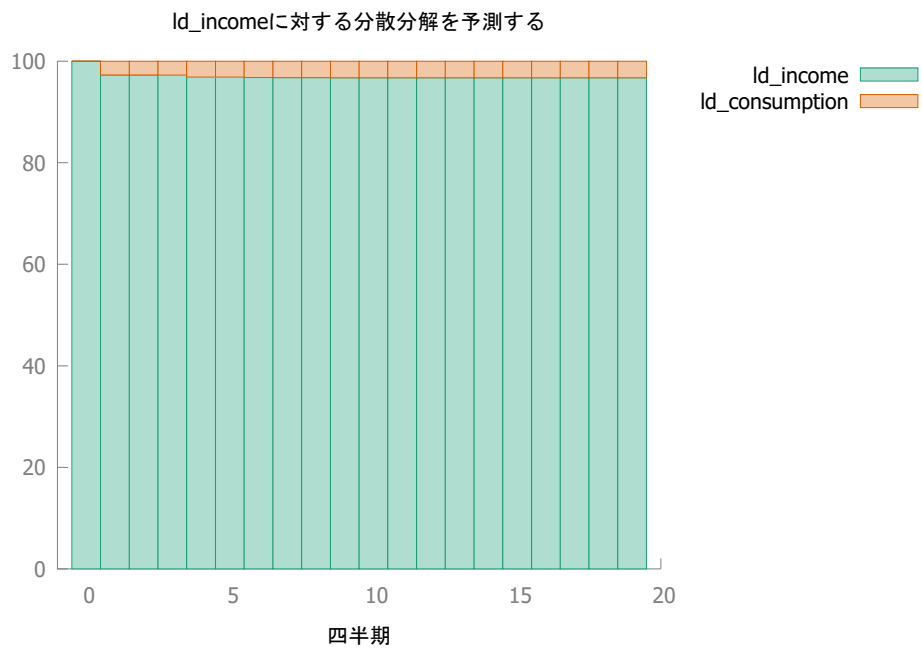


図3 所得（対数階差）の h 期先予測誤差分散に対する各構造ショックの相対分散寄与率

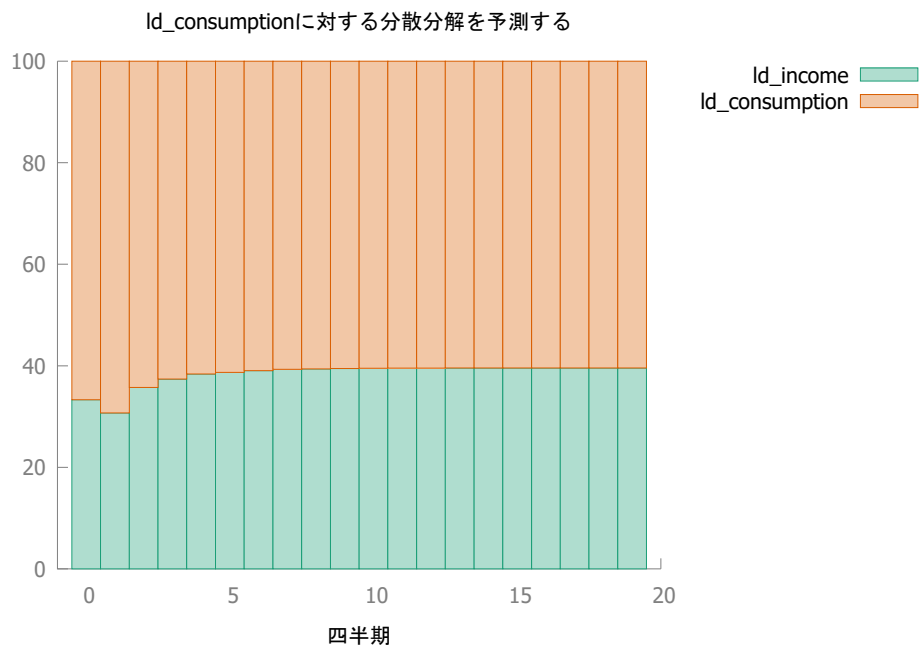


図4 消費（対数階差）の h 期先予測誤差分散に対する各構造ショックの相対分散寄与率