第 10 回　単位根過程と単位根検定（7.5.1–7.5.2, 7-G）

村澤 康友

2023 年 12 月 4 日

今日のポイント

1. トレンドと共分散定常過程の和をトレンド定常過程という．階差が共分散定常なら階差定常過程という．
2. 多項式の 1 の根を単位根という．AR 過程のラグ多項式が単位根をもつなら単位根過程という．d 個の単位根をもつ単位根過程＝ $\mathrm{I}(d)$（d 次の和分過程）．
3. 独立な I(1) 間の回帰係数の OLS 推定量が 0 に確率収束しない現象を見せかけの回帰という．
4. DF 検定，ADF 検定，ADF-GLS 検定は $H_0:\{y_t\}\sim\mathrm{I}(1)$ を検定する．
5. KPSS 検定は $H_0:\{y_t\}\sim\mathrm{I}(0)$ を検定する．

目次

1　トレンド定常と階差定常

1.1　トレンド定常過程

線形トレンドと平均 0 の共分散定常過程 $\{u_t\}$ の和を $\{y_t\}$ とする．すなわち任意の t について

$$y_t=\alpha+\delta t+u_t$$

定義 1. トレンドと共分散定常過程の和を**トレンド定常過程**という．

注 1. トレンド定常ならトレンドを除去して時系列分析を行う．

定理 1. 任意の t と $h\geq 1$ について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+h})=\alpha+\delta(t+h)+\mathrm{E}_t(u_{t+h})$$

証明.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t(y_{t+h})&=\mathrm{E}_t(\alpha+\delta(t+h)+u_{t+h})\\&=\alpha+\delta(t+h)+\mathrm{E}_t(u_{t+h})\end{aligned}$$

□

系 1. $\{u_t\}$ が iid なら任意の t と $h\geq 1$ について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+h})=\alpha+\delta(t+h)$$

注 2. h 期先予測は y_t によらずトレンドに戻る．

定理 2. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+h}) = \mathrm{var}_t(u_{t+h})$$

証明.

$$\begin{aligned}\mathrm{var}_t(y_{t+h}) &= \mathrm{var}_t(\alpha + \delta(t+h) + u_{t+h}) \\ &= \mathrm{var}_t(u_{t+h})\end{aligned}$$

□

系 2. $\{u_t\}$ が分散 σ^2 の iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+h}) = \sigma^2$$

注 3. h 期先予測の分散は h によらず一定.

1.2 階差定常過程

$\{y_t\}$ の階差 $\{\Delta y_t\}$ を平均 δ の共分散定常過程とする．すなわち任意の t について

$$\Delta y_t = \delta + u_t$$

定義 2. 階差が共分散定常なら**階差定常過程**という.

注 4. 階差定常なら階差をとって時系列分析を行う.

定理 3. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+h}) = y_t + \delta h + \mathrm{E}_t(u_{t+1}) + \cdots + \mathrm{E}_t(u_{t+h})$$

証明. 逐次代入すると

$$\begin{aligned}y_{t+h} &= y_{t+h-1} + \delta + u_{t+h} \\ &= \ldots \\ &= y_t + \delta + u_{t+1} + \cdots + \delta + u_{t+h} \\ &= y_t + \delta h + u_{t+1} + \cdots + u_{t+h}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t(y_{t+h}) &= \mathrm{E}_t(y_t + \delta h + u_{t+1} + \cdots + u_{t+h}) \\ &= y_t + \delta h + \mathrm{E}_t(u_{t+1}) + \cdots + \mathrm{E}_t(u_{t+h})\end{aligned}$$

□

系 3. $\{u_t\}$ が iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+h}) = y_t + \delta h$$

注 5. h 期先予測は y_t に依存.

定理 4. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+h}) = \mathrm{var}_t(u_{t+1} + \cdots + u_{t+h})$$

証明.

$$\begin{aligned}\mathrm{var}_t(y_{t+h}) &= \mathrm{var}_t(y_t + \delta h + u_{t+1} + \cdots + u_{t+h}) \\ &= \mathrm{var}_t(u_{t+1} + \cdots + u_{t+h})\end{aligned}$$

□

系 4. $\{u_t\}$ が分散 σ^2 の iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathrm{var}_t(y_{t+h}) = \sigma^2 h$$

注 6. h 期先予測の分散は h に比例.

定義 3. 時系列が平均に戻る性質を**平均回帰性**という.

注 7. 共分散定常なら平均回帰的．階差定常なら平均回帰的でない.

1.3 ランダム・ウォーク（p. 231）

定義 4. $\{\Delta y_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\{y_t\}$ は**ランダム・ウォーク**という.

注 8. 最も単純な階差定常過程.

例 1. 共分散定常過程とランダム・ウォーク (図 1).

定義 5. $\{\Delta y_t\}$ が系列無相関で $\mathrm{E}(\Delta y_t) \neq 0$ なら $\{y_t\}$ は**ドリフト付きランダム・ウォーク**という.

注 9. $\delta := \mathrm{E}(\Delta y_t)$ をドリフト項という.

2 単位根過程

2.1 和分過程（p. 235）

定義 6. $\{\Delta^d y_t\}$ が共分散定常なら $\{y_t\}$ は **d 次の和分過程**という.

注 10. $\mathrm{I}(d)$ と書く．$\mathrm{I}(0)$ ＝共分散定常．$\mathrm{I}(1)$ ＝階差定常.

注 11. $\mathrm{I}(d)$ は $\mathrm{I}(0)$ に変換して分析する.

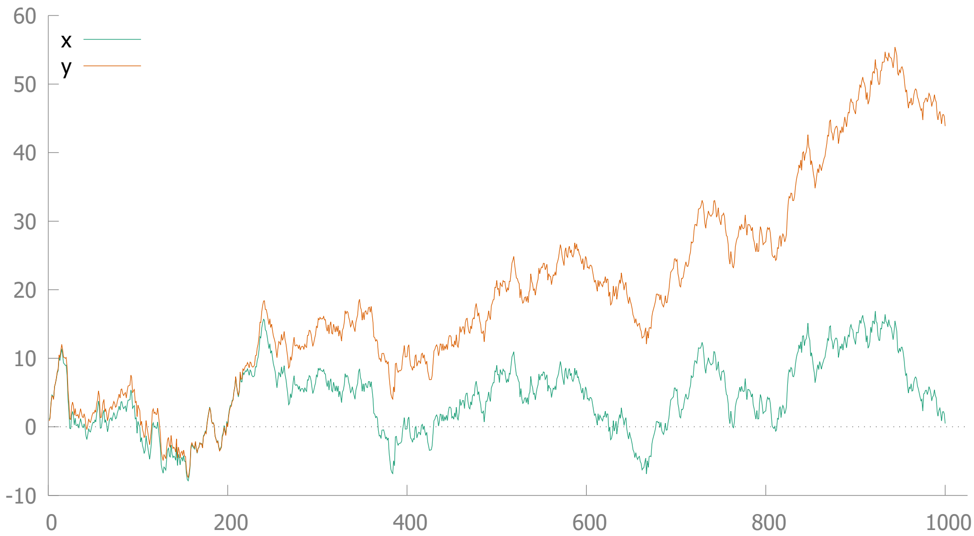

図 1　共分散定常過程とランダム・ウォーク

2.2　単位根過程（p. 232）

$\{y_t\}$ を AR(p) とする．すなわち任意の t について

$$\phi(\mathrm{L})(y_t-\mu)=w_t$$
$$\{w_t\}\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$$

ただし $\phi(\mathrm{L}):=1-\phi_1\mathrm{L}-\cdots-\phi_p\mathrm{L}^p$．$p$ 次多項式 $\phi(z)$ の p 個の根は，すべて絶対値で 1 以上とする．

定義 7. 多項式の 1 の根を**単位根**という．

定義 8. AR 過程のラグ多項式が単位根をもつなら**単位根過程**という．

定理 5. d 個の単位根をもつ単位根過程は I(d).

証明. $\phi(z)$ が d 個の単位根をもつなら因数分解より

$$\phi(z)=\phi^*(z)(1-z)^d$$

したがって任意の t について

$$\phi^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})^d(y_t-\mu)=w_t$$

すなわち

$$\phi^*(\mathrm{L})\Delta^d y_t=w_t$$

$\phi^*(z)$ の根はすべて絶対値で 1 より大きいので $\{\Delta^d y_t\}$ は I(0). □

3　見せかけの回帰（p. 240）

$\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ を独立なランダム・ウォークとする．すなわち任意の t について

$$x_t=x_{t-1}+u_t$$
$$y_t=y_{t-1}+v_t$$
$$\{u_t\}\sim \mathrm{WN}\left(\sigma_u^2\right)$$
$$\{v_t\}\sim \mathrm{WN}\left(\sigma_v^2\right)$$

ただし $\{u_t\}$ と $\{v_t\}$ は独立．$x_0,y_0:=0$ とすると，$t\geq 1$ について

$$x_t=\sum_{s=1}^t u_s$$
$$y_t=\sum_{s=1}^t v_s$$

次の 2 つの単回帰を考える（定数項なし）．

1. $\{\Delta y_t\}$ を $\{\Delta x_t\}$ に回帰
2. $\{y_t\}$ を $\{x_t\}$ に回帰

長さ T の時系列が与えられたときの回帰係数の OLS 推定量を，それぞれ $b_{0,T},b_{1,T}$ とする．

定理 6. $\{u_t\},\{v_t\}$ が定常・エルゴード的なら

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} b_{0,T}=0$$

証明．OLS 推定量は

$$
\begin{aligned}
b_{0,T} &= \frac{\sum_{t=2}^T \Delta x_t \Delta y_t}{\sum_{t=2}^T (\Delta x_t)^2} \\
&= \frac{(1/T)\sum_{t=2}^T u_t v_t}{(1/T)\sum_{t=2}^T u_t^2}
\end{aligned}
$$

エルゴード定理より

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=2}^T u_t v_t &= \mathrm{E}(u_t v_t) \\
\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=2}^T u_t^2 &= \mathrm{E}\left(u_t^2\right)
\end{aligned}
$$

$\{u_t\}$ と $\{v_t\}$ は独立なホワイト・ノイズなので

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{plim}_{T\to\infty} b_{0,T} &= \frac{\mathrm{E}(u_t v_t)}{\mathrm{E}\left(u_t^2\right)} \\
&= \frac{\mathrm{E}(u_t)\,\mathrm{E}(v_t)}{\mathrm{E}\left(u_t^2\right)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

定理 7.

$$
\operatorname*{plim}_{T\to\infty} b_{1,T} \neq 0
$$

証明．OLS 推定量は

$$
\begin{aligned}
b_{1,T} &= \frac{\sum_{t=1}^T x_t y_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \\
&= \frac{\left(1/T^2\right)\sum_{t=1}^T x_t y_t}{(1/T^2)\sum_{t=1}^T x_t^2}
\end{aligned}
$$

分子・分母を変形すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T x_t y_t &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \frac{x_t}{\sqrt{T}}\frac{y_t}{\sqrt{T}} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{s=1}^t u_s\right)\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{s=1}^t v_s\right) \\
\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T x_t^2 &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \left(\frac{x_t}{\sqrt{T}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{s=1}^t u_s\right)^2
\end{aligned}
$$

これらは 0 でない確率変数に分布収束する（詳細は略）． □

定義 9. 独立な I(1) 間の回帰係数の OLS 推定量が 0 に確率収束しない現象を**見せかけの回帰**という．

注 12. I(1) なら I(0) に変換して回帰すればよいが，事前に I(0) か I(1) か確認する必要がある．

例 2. 2 つの独立なランダム・ウォーク（図 2）．

4 単位根検定

4.1 DF 検定（p. 132）

$\{y_t\}$ を定数項なしの AR(1) とする．すなわち任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

$\phi = 1$ なら I(1)，$|\phi| < 1$ なら I(0)．単位根検定問題は

$$
H_0 : \phi = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \phi < 1
$$

両辺から y_{t-1} を引くと，任意の t について

$$
\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + w_t
$$

ただし $\gamma := \phi - 1$．したがって単位根検定問題は

$$
H_0 : \gamma = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \gamma < 0
$$

H_0 の下で $\{y_t\}$ は I(1) なので，γ の OLS 推定量は漸近正規性をもたず，t 統計量は $\mathrm{N}(0,1)$ に分布収束しない．

定義 10. Δy_t の y_{t-1} 上への回帰における y_{t-1} の回帰係数=0 の検定の t 統計量を τ **統計量**という．

定義 11. τ 統計量の正しい漸近分布に基づく単位根検定を *Dicky–Fuller (DF)* **検定**という．

4.2 ADF 検定（p. 132）

$\{y_t\}$ を定数項なしの AR$(p+1)$ とする．すなわち任意の t について

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathrm{L}) y_t &= w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

補題 1.

$$
\phi(\mathrm{L}) = \phi(1)\mathrm{L} + \phi^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})
$$

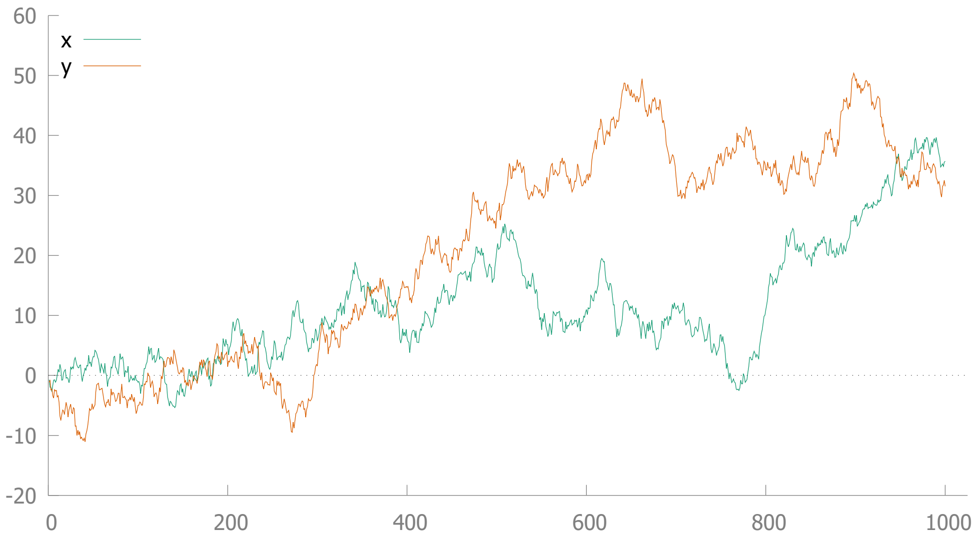

図 2　2 つの独立なランダム・ウォーク

ただし $\phi^*(\mathrm{L})$ は p 次のラグ多項式.

証明. $\phi(z)$ を式変形すると

$$\phi(z) = \phi(1)z + \phi(z) - \phi(1)z$$

$\phi(z) - \phi(1)z$ は $z = 1$ で 0 なので，因数分解より任意の z について

$$\phi(z) - \phi(1)z = \phi^*(z)(1 - z)$$

□

定理 8. 任意の t について

$$\phi^*(\mathrm{L})\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + w_t$$

証明. 補題より，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})y_t &= [\phi(1)\mathrm{L} + \phi^*(\mathrm{L})(1 - \mathrm{L})]y_t \\ &= \phi(1)\mathrm{L}y_t + \phi^*(\mathrm{L})(1 - \mathrm{L})y_t \\ &= \phi(1)y_{t-1} + \phi^*(\mathrm{L})\Delta y_t\end{aligned}$$

したがって任意の t について

$$\phi(1)y_{t-1} + \phi^*(\mathrm{L})\Delta y_t = w_t$$

□

注 13. すなわち任意の t について

$$\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + \phi_1^*\Delta y_{t-1} + \cdots + \phi_p^*\Delta y_{t-p} + w_t$$

単位根検定問題は

$$H_0 : \phi(1) = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \phi(1) > 0$$

定義 12. Δy_t の $(y_{t-1}, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p})$ 上への回帰における y_{t-1} の偏回帰係数=0 の検定の τ 統計量を用いる単位根検定を**拡張** *DF*（*augmented DF, ADF*）**検定**という.

注 14. ラグ次数 p は情報量基準等で選択する.

4.3　定数項とトレンド（p. 131）

Δy_t の y_{t-1} 上への回帰に定数項を入れると

$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + w_t$$

線形トレンドを入れると

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + w_t$$

定数項・トレンドは OLS で推定できる．ADF 検定も同様．ただし定数項・トレンドの有無で τ 統計量の漸近分布は異なる．

4.4　ADF-GLS 検定

定数項・トレンドを OLS でなく一般化最小 2 乗法（generalized least squares, GLS）で推定すると，単位根検定の検出力が高まる．

定義 13. 定数項・トレンドを GLS で推定した ADF 検定を *ADF-GLS* **検定**という.

5　定常性検定

$\{y_t\}$ を確率過程とする．単位根検定問題は

$$H_0 : \{y_t\} \sim \mathrm{I}(1) \quad \text{vs} \quad H_1 : \{y_t\} \sim \mathrm{I}(0)$$

定常性検定問題は

$$H_0 : \{y_t\} \sim \mathrm{I}(0) \quad \text{vs} \quad H_1 : \{y_t\} \sim \mathrm{I}(1)$$

次の統計量を考える．

$$\mathrm{LM} := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{s=1}^{t} y_s\right)^2$$

これは $\{y_t\}$ が平均 0，分散 1 の iid なら分布収束するが，I(1) なら発散する．

定義 14. *KPSS* **統計量**は

$$\mathrm{LM} := \frac{T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\left(T^{-1/2}\sum_{s=1}^{t} y_s\right)^2}{\hat{\mathrm{var}}\left(T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T} y_t\right)}$$

注 15. 分母の $T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T} y_t$ の分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} y_t\right) &= \frac{\mathrm{var}(y_1 + \cdots + y_T)}{T} \\ &= \ldots \\ &= \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} \frac{T-|s|}{T}\gamma(s)\end{aligned}$$

一致推定量は

$$\hat{\mathrm{var}}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} y_t\right) := \sum_{s=-S}^{S} \frac{S+1-|s|}{S+1}\hat{\gamma}(s)$$

推定に用いる標本自己共分散の最大次数 S を設定する必要がある．

注 16. KPSS 統計量は $\{y_t\}$ が I(0) なら分布収束するが，I(1) なら発散する．ただし定数項・トレンドの有無で KPSS 統計量の漸近分布は異なる．

定義 15. KPSS 統計量を用いた定常性検定を *KPSS* **検定**という．

注 17. 単位根検定と定常性検定の結果は必ずしも一致しない．

6　今日のキーワード

トレンド定常過程，階差定常過程，ランダム・ウォーク，平均回帰性，ドリフト付きランダム・ウォーク，d 次の和分過程，単位根，単位根過程，見せかけの回帰，τ 統計量，Dicky–Fuller (DF) 検定，拡張 DF（ADF）検定，ADF-GLS 検定，KPSS 統計量，KPSS 検定

7　次回までの準備

提出　宿題 10

復習　教科書第 7 章 5.1–5.2 節と付録 G，復習テスト 10

予習　教科書第 7 章 5.3 節