第 11 回　共和分過程と共和分検定（7.5.3）

村澤 康友

2023 年 12 月 18 日

今日のポイント

1. $\{\boldsymbol{y}_t\}$ が $\mathrm{I}(d)$ で $\{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{y}_t\}$ が $\mathrm{I}(d-b)$ なら $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を (d,b) 次の共和分過程，$\boldsymbol{\alpha}$ を共和分ベクトルといい，$\mathrm{CI}(d,b)$ と書く．線形独立な共和分ベクトルの数を共和分階数という．
2. 共和分する変数間の線形モデルを共和分回帰モデルという．
3. $T \to \infty$ で $1/\sqrt{T}$ より速く推定量が母数に確率収束する性質を超一致性という．共和分ベクトルの OLS 推定量は超一致性をもつ．
4. 共和分回帰の残差の ADF 検定で共和分の有無を検定する手法を Engle–Granger の 2 段階法という．

目次

1 行列の階数

1.1 線形独立

$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ をベクトル，$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ をスカラーとする．

定義 1. $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$ を $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ の**線形結合**という．

定義 2. $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{0}_n \Longrightarrow \alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ なら $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ は**線形独立**という．

定義 3. $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{0}_n$ となる $\boldsymbol{0}_n$ 以外の $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)'$ が存在するなら $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ は**線形従属**という．

1.2 階数

$\boldsymbol{A}$ を $m\times n$ 行列とする．

定義 4. $\boldsymbol{A}$ の線形独立な行の数を $\boldsymbol{A}$ の**行階数**という．

定義 5. $\boldsymbol{A}$ の線形独立な列の数を $\boldsymbol{A}$ の**列階数**という．

定理 1. 行階数＝列階数.

証明. 省略. □

定義 6. $\boldsymbol{A}$ の線形独立な行または列の数を $\boldsymbol{A}$ の**階数**という．

注 1. $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A})$ と書く．

2 共和分

2.1 和分過程と長期均衡（p. 236）

経済理論や会計上の恒等式によって，しばしば経済時系列の間に長期均衡関係や一定の比率（Great Ratios）が生じる．例えば

1. 予測値と実績値（合理的期待仮説）
2. 所得と消費（ライフ・サイクル＝恒常所得仮説）
3. マクロの所得・消費・投資（国民所得勘定）
4. 生産量・資本ストック・労働投入（生産関数）
5. マネーストックと物価（貨幣数量説）
6. 名目金利とインフレ率（フィッシャー方程式）
7. 短期金利と長期金利（金利の期間構造）
8. 現物価格と先物価格（裁定取引）
9. 2 国の物価水準と為替レート（購買力平価説）

これらの時系列が $\mathrm{I}(1)$ だと見せかけの回帰の可能性もあり，長期均衡関係の検証は注意を要する．

例 1. 1960 年〜1982 年のアメリカのマクロの所得と消費の対数系列（図 1）．

2.2 共和分過程（p. 236）

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ を N 変量確率過程とする．

定義 7. $\{\boldsymbol{y}_t\}$ が $\mathrm{I}(d)$ で $\{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{y}_t\}$ が $\mathrm{I}(d-b)$ なら $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を (d,b) **次の共和分過程**，$\boldsymbol{\alpha}$ を**共和分ベクトル**という．

注 2. $\mathrm{CI}(d,b)$ と書く．$\mathrm{CI}(1,1)$ が特に重要．

注 3. $\boldsymbol{\alpha}$ が共和分ベクトルなら任意の $c \neq 0$ について $c\boldsymbol{\alpha}$ も共和分ベクトル．通常は長さを 1 にするか特定の成分を 1 として基準化する．

注 4. 基準化しても共和分ベクトルは 1 つとは限らない．

定義 8. 線形独立な共和分ベクトルの数を**共和分階数**という．

定理 2. $\{\boldsymbol{y}_t\}$ が $\mathrm{CI}(1,1)$ で共和分階数 $= N$ なら $\{\boldsymbol{y}_t\}$ は $\mathrm{I}(0)$．

証明. 復習テスト． □

3 共和分回帰

3.1 共和分回帰モデル（p. 236）

簡単化のため $\{x_t\}$ をランダム・ウォークとし，$\{y_t\}$ と $\{x_t\}$ に線形モデルを仮定する．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\Delta x_t &= u_t \\ y_t &= \beta x_t + v_t \\ \left\{\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}\right\} &\sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})\end{aligned}$$

$-\beta x_t + y_t = v_t$ より $\beta \neq 0$ なら $\{x_t, y_t\}$ は $\mathrm{CI}(1,1)$ で共和分ベクトルは $(-\beta, 1)$．β の推定を考える．

定理 3. $\{u_t, v_t\}$ が iid なら

$$\mathrm{cov}(x_t, v_t) = \mathrm{cov}(u_t, v_t)$$

証明. $\mathrm{E}(v_t) = 0$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(x_t, v_t) &= \mathrm{E}(x_t v_t) \\ &= \mathrm{E}((x_{t-1} + u_t)v_t) \\ &= \mathrm{E}(x_{t-1}v_t) + \mathrm{E}(u_t v_t) \\ &= \mathrm{E}(x_{t-1}v_t) + \mathrm{cov}(u_t, v_t)\end{aligned}$$

$\{u_t, v_t\}$ は iid なので，繰り返し期待値の法則より第 1 項は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x_{t-1}v_t) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_{t-1}v_t | x_{t-1})) \\ &= \mathrm{E}(x_{t-1}\,\mathrm{E}(v_t | x_{t-1})) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

注 5. したがって $\mathrm{cov}(u_t, v_t) \neq 0$ なら説明変数と誤差項は相関をもつ．すなわち $\mathrm{E}(y_t | x_t) \neq \beta x_t$．

定義 9. 共和分する変数間の線形モデルを**共和分回帰モデル**という．

注 6. 条件付き期待値を与えるモデルでなく，どの変数を従属変数としてもよい．

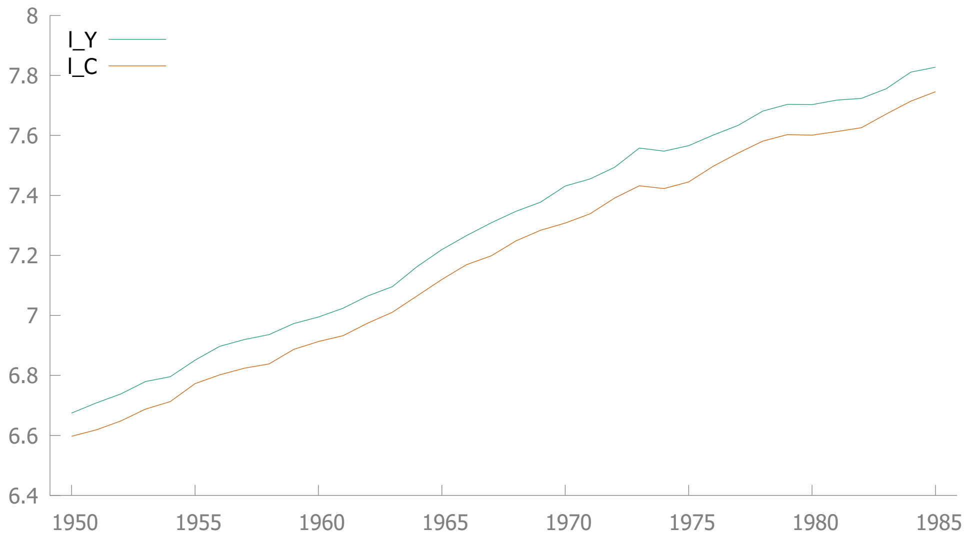

図 1　1960 年〜1982 年のアメリカのマクロの所得と消費の対数系列

3.2　OLS 推定量

$x_0 := 0$ とすると，$t \geq 1$ について

$$x_t = \sum_{s=1}^{t} u_s$$

長さ T の時系列が与えられたときの β の OLS 推定量を b_T とする．

定理 4. $T \to \infty$ で $T(b_T - \beta)$ は分布収束．

証明．OLS 推定量は

$$\begin{aligned} b_T &= \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t(\beta x_t + v_t)}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t v_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} \end{aligned}$$

したがって

$$T(b_T - \beta) = \frac{(1/T)\sum_{t=1}^{T} x_t v_t}{(1/T^2)\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

分子・分母を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t v_t &= \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{s=1}^{t} u_s\right)\frac{v_t}{\sqrt{T}} \\ \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} x_t^2 &= \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{s=1}^{t} u_s\right)^2 \frac{1}{T} \end{aligned}$$

これらは 0 でない確率変数に分布収束する（詳細は略）． □

注 7. この例では $\beta = 0$ なら $\{y_t\}$ は I(0) なので見せかけの回帰は生じない．

定義 10. $T \to \infty$ で $1/\sqrt{T}$ より速く推定量が母数に確率収束する性質を**超一致性**という．

注 8. 通常の回帰と共和分回帰で OLS 推定量の性質は大きく異なる．

収束の速度　通常の回帰は $\sqrt{T}(b_T - \beta)$ が分布収束．共和分回帰は $T(b_T - \beta)$ が分布収束（超一致性）．

説明変数と誤差項の相関　通常の回帰は一致性を失う（内生性バイアス）．共和分回帰は超一致性を失わない．

$\beta = 0$ の場合　通常の回帰は一致性を失わない．見せかけの回帰なら共和分回帰は一致性を失う．

したがって t 値は無意味.

例 2. CI$(1,1)$ の原系列の散布図（図 2）と階差系列の散布図（図 3）.

4 Engle–Granger の共和分検定

4.1 共和分ベクトルが既知

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ が CI$(1,1)$ か否かを検定したい．共和分ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ が既知なら $\{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{y}_t\}$ の単位根検定＝共和分検定．すなわち共和分検定問題は

$$H_0 : \{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{y}_t\} \sim \mathrm{I}(1) \quad \text{vs} \quad H_1 : \{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{y}_t\} \sim \mathrm{I}(0)$$

4.2 共和分ベクトルが未知（p. 236）

$\boldsymbol{\alpha}$ が未知なら OLS 推定値 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ を用いて $\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{y}_t\}$ の単位根検定を行う.

定義 11. 共和分回帰の残差の ADF 検定で共和分の有無を検定する手法を ***Engle–Granger* の *2* 段階法**という.

注 9. 共和分ベクトルの推定誤差のため，τ 統計量の漸近分布は通常の ADF 検定と異なる．また共和分回帰の定数項・トレンドの有無により，τ 統計量の漸近分布は異なる.

注 10. 共和分回帰の従属変数の選択により残差が異なるので τ 統計量の値も異なる.

5 今日のキーワード

線形結合, 線形独立, 線形従属, 行階数, 列階数, 階数, (d,b) 次の共和分過程, 共和分ベクトル, 共和分階数, 共和分回帰モデル, 超一致性, Engle–Granger の 2 段階法

6 次回までの準備

提出 宿題 11
復習 教科書第 7 章 5.3 節，復習テスト 11
予習 教科書第 7 章 5.3 節

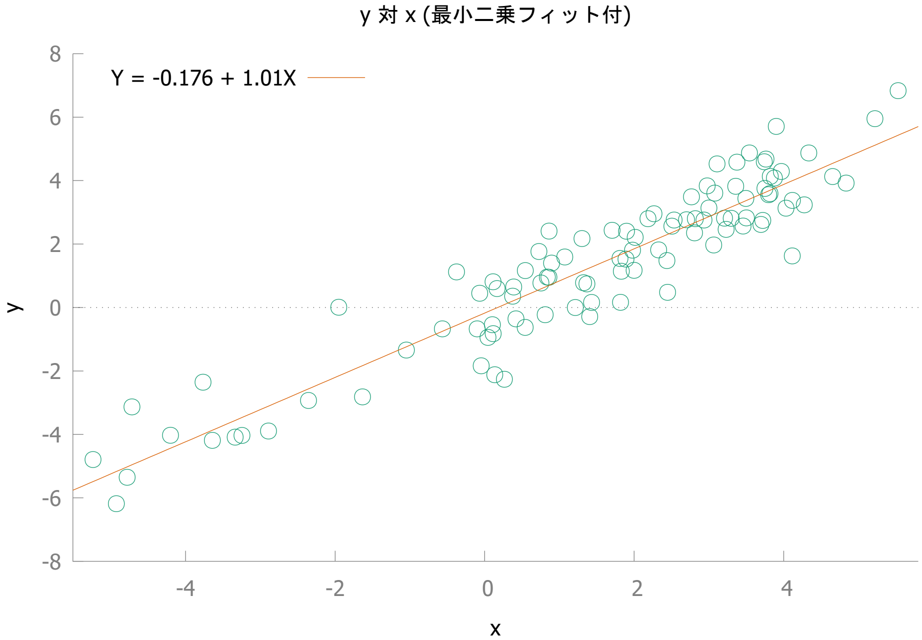

図 2　CI(1, 1) の原系列の散布図

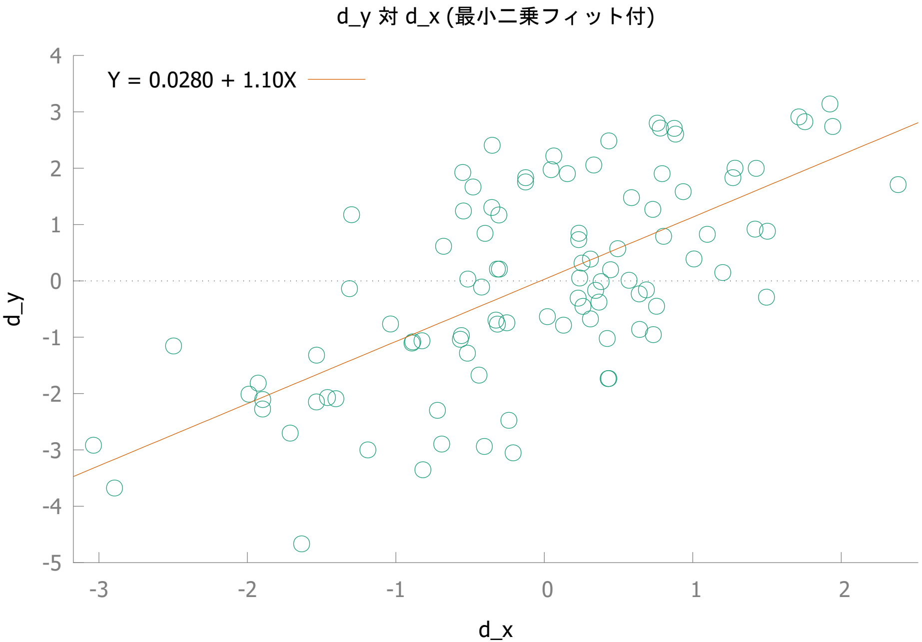

図 3　CI(1, 1) の階差系列の散布図