計量経済 II：中間試験

村澤 康友

2022 年 11 月 22 日

注意： 3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下で定義される時系列分析の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   (a) 平均 0 で系列相関のない共分散定常過程
   (b) 標本自己相関関数の棒グラフ
   (c) 予測誤差の 2 乗の（条件付き）期待値
   (d) 変数間の理論的な関係を表した連立方程式
2. （50 点）$\{y_t\}$ を共分散定常な AR(2) 過程とする．すなわち任意の t について

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t$$
$$\{w_t\} \sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$$

   $\{y_t\}$ の自己共分散関数を $\gamma(.)$，自己相関関数を $\rho(.)$ とする．
   (a) $\mathrm{E}(y_t)$ を c, ϕ_1, ϕ_2 で表しなさい．
   (b) $\gamma(1) := \mathrm{cov}(y_t, y_{t-1})$ を $\gamma(0)$ と ϕ_1, ϕ_2 で表しなさい．
   (c) $\gamma(2) := \mathrm{cov}(y_t, y_{t-2})$ を $\gamma(0), \gamma(1)$ と ϕ_1, ϕ_2 で表しなさい．
   (d) $\rho(1), \rho(2)$ と ϕ_1, ϕ_2 の関係を表す Yule–Walker 方程式を導きなさい．
   (e) Yule–Walker 方程式を解いて ϕ_1, ϕ_2 を $\rho(1), \rho(2)$ で表しなさい．
3. （30 点）次頁のコンピューター出力は，旧西ドイツのマクロの所得（Y_t）・消費（C_t）・投資（I_t）の季節調整済み四半期系列の対前期比変化率（対数階差），すなわち $\{\Delta \ln Y_t, \Delta \ln C_t, \Delta \ln I_t\}$ に関する 3 変量 VAR(2) モデルの推定結果（の一部）である．以下の各変数の予測に役立つと考えられる変数を，根拠を示して列挙しなさい．
   (a) $\Delta \ln Y_t$
   (b) $\Delta \ln C_t$
   (c) $\Delta \ln I_t$

VAR モデル, ラグ次数: 2

最小二乗法 (OLS) 推定量, 観測: 1960:4-1982:4 ($T = 89$)

方程式 1: ld_income

	係数	標準誤差	t-ratio	p 値
const	0.0125949	0.00334339	3.767	0.0003
ld_income_1	−0.123256	0.126852	−0.9717	0.3341
ld_income_2	0.0209787	0.123096	0.1704	0.8651
ld_consumption_1	0.305059	0.143900	2.120	0.0370
ld_consumption_2	0.0490191	0.143467	0.3417	0.7335
ld_investment_1	0.0433474	0.0288637	1.502	0.1370
ld_investment_2	0.0616325	0.0287580	2.143	0.0351

方程式 2: ld_consumption

	係数	標準誤差	t-ratio	p 値
const	0.0123795	0.00296019	4.182	0.0001
ld_income_1	0.289319	0.112313	2.576	0.0118
ld_income_2	0.366431	0.108987	3.362	0.0012
ld_consumption_1	−0.284515	0.127407	−2.233	0.0283
ld_consumption_2	−0.115976	0.127023	−0.9130	0.3639
ld_investment_1	0.00273851	0.0255555	0.1072	0.9149
ld_investment_2	0.0497398	0.0254619	1.953	0.0542

方程式 3: ld_investment

	係数	標準誤差	t-ratio	p 値
const	−0.00991912	0.0131944	−0.7518	0.4543
ld_income_1	0.337485	0.500610	0.6741	0.5021
ld_income_2	0.182728	0.485787	0.3761	0.7078
ld_consumption_1	0.652044	0.567891	1.148	0.2542
ld_consumption_2	0.598070	0.566181	1.056	0.2939
ld_investment_1	−0.272565	0.113908	−2.393	0.0190
ld_investment_2	−0.134051	0.113491	−1.181	0.2410

解答例

1. 時系列分析の基本用語
   (a) ホワイト・ノイズ
   (b) コレログラム
   (c) 平均 2 乗誤差（MSE）
   (d) 構造形
2. AR(2) 過程
   (a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}(c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t) \\
&= c + \phi_1 \mathrm{E}(y_{t-1}) + \phi_2 \mathrm{E}(y_{t-2}) \\
&= c + \phi_1 \mathrm{E}(y_t) + \phi_2 \mathrm{E}(y_t) \\
&= \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
\gamma(1) &:= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-1}) \\
&= \mathrm{cov}(c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t, y_{t-1}) \\
&= \phi_1 \mathrm{cov}(y_{t-1}, y_{t-1}) + \phi_2 \mathrm{cov}(y_{t-2}, y_{t-1}) \\
&= \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1) \\
&= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma(0)
\end{aligned}
$$

   - $\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1)$ で 5 点.

   (c)

$$
\begin{aligned}
\gamma(2) &:= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-2}) \\
&= \mathrm{cov}(c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t, y_{t-2}) \\
&= \phi_1 \mathrm{cov}(y_{t-1}, y_{t-2}) + \phi_2 \mathrm{cov}(y_{t-2}, y_{t-2}) \\
&= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(0)
\end{aligned}
$$

   (d) 前 2 問より Yule–Walker 方程式は

$$
\begin{aligned}
\rho(1) &= \phi_1 + \phi_2 \rho(1) \\
\rho(2) &= \phi_1 \rho(1) + \phi_2
\end{aligned}
$$

   (e) 第 2 式に $\rho(1)$ を掛けると

$$
\begin{aligned}
\rho(1) &= \phi_1 + \phi_2 \rho(1) \\
\rho(1)\rho(2) &= \phi_1 \rho(1)^2 + \phi_2 \rho(1)
\end{aligned}
$$

   ϕ_2 を消去すると

$$
\rho(1) - \rho(1)\rho(2) = \phi_1 - \phi_1 \rho(1)^2
$$

   したがって

$$
\phi_1 = \frac{\rho(1)(1 - \rho(2))}{1 - \rho(1)^2}
$$

第 1 式に $\rho(1)$ を掛けると

$$
\begin{aligned}
\rho(1)^2 &= \phi_1\rho(1) + \phi_2\rho(1)^2 \\
\rho(2) &= \phi_1\rho(1) + \phi_2
\end{aligned}
$$

ϕ_1 を消去すると

$$\rho(2) - \rho(1)^2 = \phi_2 - \phi_2\rho(1)^2$$

したがって

$$\phi_2 = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$$

3. VAR(2) モデル

有意水準 5 %で係数=0 の帰無仮説が棄却される説明変数を予測に役立つ変数とすると，各式で p 値が.05 以下の説明変数は

(a) $\Delta \ln C_{t-1}, \Delta \ln I_{t-2}$

(b) $\Delta \ln Y_{t-1}, \Delta \ln Y_{t-2}, \Delta \ln C_{t-1}$

(c) $\Delta \ln I_{t-1}$