計量経済 II：中間試験

村澤 康友

2023 年 11 月 20 日

注意： 3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下で定義される時系列分析の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   (a) 試行の結果によって値が決まる数列
   (b) $\{x_t\}$ を $\{\Delta x_t\}$ に変換した系列
   (c) 任意の時点 t と時点差 s について $\mathrm{E}(Y_t)$ と $\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ が t に依存しない性質
   (d) $\{\Delta y_t\}$ がホワイト・ノイズとなる $\{y_t\}$
2. （50 点）$\{y_t\}$ を定数項なしの MA(2) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} y_t &= w_t - \theta_1 w_{t-1} - \theta_2 w_{t-2} \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right) \end{aligned}$$

   $\{y_t\}$ の自己共分散関数を $\gamma(.)$，自己相関関数を $\rho(.)$ とする．
   (a) $\mathrm{E}(y_t)$ を求めなさい．
   (b) $\gamma(0)$ を MA 係数と σ^2 で表しなさい．
   (c) $\gamma(1)$ を MA 係数と σ^2 で表しなさい．
   (d) $\gamma(2)$ を MA 係数と σ^2 で表しなさい．
   (e) $\rho(1), \rho(2)$ を MA 係数で表しなさい．

3. （30 点）以下のコンピューター出力は，旧西ドイツのマクロの所得（Y_t）と消費（C_t）の季節調整済み四半期系列の対前期比変化率（対数階差），すなわち $\{\Delta \ln Y_t, \Delta \ln C_t\}$ に関する 2 変量 VAR(2) モデルの推定結果である．

VAR モデル, ラグ次数: 2

最小二乗法 (OLS) 推定量, 観測: 1960:4-1982:4 ($T = 89$)

方程式 1: ld_income

	係数	標準誤差	t-ratio	p 値
const	0.0115223	0.00337525	3.414	0.0010
ld_income_1	−0.101228	0.127639	−0.7931	0.4300
ld_income_2	0.0137267	0.125771	0.1091	0.9134
ld_consumption_1	0.343344	0.140219	2.449	0.0164
ld_consumption_2	0.147676	0.140464	1.051	0.2961

ゼロ制約の F 検定

All lags of ld_income	$F(2, 84) = 0.355271$	[0.7020]
All lags of ld_consumption	$F(2, 84) = 3.01643$	[0.0543]
All vars, lag 2	$F(2, 84) = 0.884147$	[0.4169]

方程式 2: ld_consumption

	係数	標準誤差	t-ratio	p 値
const	0.0120202	0.00295682	4.065	0.0001
ld_income_1	0.323107	0.111816	2.890	0.0049
ld_income_2	0.360738	0.110179	3.274	0.0015
ld_consumption_1	−0.303040	0.122836	−2.467	0.0157
ld_consumption_2	−0.0599492	0.123050	−0.4872	0.6274

ゼロ制約の F 検定

All lags of ld_income	$F(2, 84) = 7.86973$	[0.0007]
All lags of ld_consumption	$F(2, 84) = 3.13047$	[0.0488]
All vars, lag 2	$F(2, 84) = 6.55946$	[0.0023]

この分析結果について，以下の問いに答えなさい．

(a) 推定したモデルが正しいと仮定した場合，今期の所得が 1% 増加したら，来期の所得と消費はそれぞれ何%増加または減少すると予測されるか？

(b) $\Delta \ln Y_t$, $\Delta \ln C_t$ それぞれの予測に役立つ説明変数を有意水準 5% の両側検定で選択しなさい（根拠となる統計量も示すこと）．

(c) 所得から消費へのグレンジャー因果検定の F 検定統計量の p 値を読み取り，有意水準 5 %の検定の結果を説明しなさい．

解答例

1. 時系列分析の基本用語
   (a) 確率変数列
      - 「離散確率過程」でも OK.「確率過程」は 1 点減.
   (b) 差分系列
      - 「階差系列」でも OK.
   (c) 共分散定常性
   (d) ランダム・ウォーク
2. MA(2) 過程
   (a) $\{w_t\}$ はホワイトノイズなので，期待値の線形性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \theta_2 w_{t-2}) \\
&= \mathrm{E}(w_t) - \theta_1 \mathrm{E}(w_{t-1}) - \theta_2 \mathrm{E}(w_{t-2}) \\
&= \mathrm{E}(w_t) - \theta_1 \mathrm{E}(w_t) - \theta_2 \mathrm{E}(w_t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

      - $\mathrm{E}(w_t) - \theta_1 \mathrm{E}(w_{t-1}) - \theta_2 \mathrm{E}(w_{t-2})$ で 2 点.
      - $\mathrm{E}(w_t) - \theta_1 \mathrm{E}(w_t) - \theta_2 \mathrm{E}(w_t)$ で 5 点.
      - $\mathrm{MA}(q)$ で解答したら 0 点.

   (b) $\{w_t\}$ は $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なので

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &:= \mathrm{var}(y_t) \\
&= \mathrm{var}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \theta_2 w_{t-2}) \\
&= \mathrm{var}(w_t) + \theta_1^2 \mathrm{var}(w_{t-1}) + \theta_2^2 \mathrm{var}(w_{t-2}) \\
&= \mathrm{var}(w_t) + \theta_1^2 \mathrm{var}(w_t) + \theta_2^2 \mathrm{var}(w_t) \\
&= \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right) \sigma^2
\end{aligned}
$$

      - $\mathrm{var}(w_t) + \theta_1^2 \mathrm{var}(w_{t-1}) + \theta_2^2 \mathrm{var}(w_{t-2})$ で 2 点.
      - $\mathrm{var}(w_t) + \theta_1^2 \mathrm{var}(w_t) + \theta_2^2 \mathrm{var}(w_t)$ で 5 点.
      - $\mathrm{MA}(q)$ で解答したら 0 点.

   (c) $\{w_t\}$ は $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なので

$$
\begin{aligned}
\gamma(1) &:= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-1}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \theta_2 w_{t-2}, w_{t-1} - \theta_1 w_{t-2} - \theta_2 w_{t-3}) \\
&= \mathrm{cov}(-\theta_1 w_{t-1}, w_{t-1}) + \mathrm{cov}(-\theta_2 w_{t-2}, -\theta_1 w_{t-2}) \\
&= -\theta_1 \mathrm{var}(w_{t-1}) + \theta_2 \theta_1 \mathrm{var}(w_{t-2}) \\
&= -\theta_1 \mathrm{var}(w_t) + \theta_2 \theta_1 \mathrm{var}(w_t) \\
&= (-\theta_1 + \theta_2 \theta_1) \sigma^2
\end{aligned}
$$

      - $-\theta_1 \mathrm{var}(w_{t-1}) + \theta_2 \theta_1 \mathrm{var}(w_{t-2})$ で 2 点.
      - $-\theta_1 \mathrm{var}(w_t) + \theta_2 \theta_1 \mathrm{var}(w_t)$ で 5 点.
      - $\mathrm{MA}(q)$ で解答したら 0 点.

(d) $\{w_t\}$ は $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なので

$$\begin{aligned}
\gamma(2) &:= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-2}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t - \theta_1 w_{t-1} - \theta_2 w_{t-2}, w_{t-2} - \theta_1 w_{t-3} - \theta_2 w_{t-4}) \\
&= \mathrm{cov}(-\theta_2 w_{t-2}, w_{t-2}) \\
&= -\theta_2 \operatorname{var}(w_{t-2}) \\
&= -\theta_2 \operatorname{var}(w_t) \\
&= -\theta_2 \sigma^2
\end{aligned}$$

- $-\theta_2 \operatorname{var}(w_{t-2})$ で 2 点.
- $-\theta_2 \operatorname{var}(w_t)$ で 5 点.
- $\mathrm{MA}(q)$ で解答したら 0 点.

(e) 前 3 問より

$$\begin{aligned}
\rho(1) &= \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} \\
&= \frac{(-\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma^2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2} \\
&= \frac{-\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\
\rho(2) &= \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} \\
&= \frac{-\theta_2\sigma^2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2} \\
&= \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}
\end{aligned}$$

- 各 5 点.
- $\rho(1) = \gamma(1)/\gamma(0)$, $\rho(2) = \gamma(2)/\gamma(0)$ で各 1 点.
- $\mathrm{MA}(q)$ で解答したら 0 点.

3. 2 変量 VAR(2) モデル

(a) 来期の所得は 0.101228% 減少し，消費は 0.323107% 増加すると予測される.

- 各 5 点.

(b) p 値が.05 以下の説明変数を選択する.

i. $\Delta \ln Y_t$ の予測に役立つ変数は $\Delta \ln C_{t-1}$（p 値は 0.0164）

ii. $\Delta \ln C_t$ の予測に役立つ変数は $\Delta \ln Y_{t-1}$（p 値は 0.0049), $\Delta \ln Y_{t-2}$（p 値は 0.0015), $\Delta \ln C_{t-1}$（p 値は 0.0157).

- 各 5 点.
- p 値なしは各 1 点.

(c) p 値は 0.0007. p 値が有意水準 0.05 より小さいので，所得から消費へのグレンジャー因果なしの帰無仮説を棄却し，グレンジャー因果ありの対立仮説を採択する.

- p 値の誤りは 0 点.