計量経済 II：復習テスト 1

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 9 月 25 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 20 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $(x_1, x_2, x_3) := (100, 101, 102)$ とする．以下を求めなさい（計算機使用可）．
   (a) 階差：$\Delta x_2, \Delta x_3$

   (b) 変化率：$\Delta x_2/x_1, \Delta x_3/x_2$

   (c) 対数：$\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3$

   (d) 対数階差：$\Delta \ln x_2, \Delta \ln x_3$

2. 関数 $f(x)$ は 3 回微分可能とする．$x=a$ の近傍で $f(x)$ を近似した 3 次関数を $g(x)$ とする．すなわち

$$g(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

(a) $g'(x), g''(x), g'''(x)$ を求めなさい．

(b) $g(a), g'(a), g''(a), g'''(a)$ を求めなさい．

(c) $x=0$ の近傍で $f(x) := \mathrm{e}^x$ を近似した 3 次関数を $g(x)$ とする．$g(x)$ を求めなさい．

(d) $x=0$ の近傍で $f(x) := \mathrm{e}^x$ を近似した n 次関数を $g_n(x)$ とする．$n \to \infty$ として e^x を無限次の多項式で表しなさい（これを e^x のマクローリン展開という）．

解答例

1.（a）

$$\begin{aligned}\Delta x_2 &:= x_2 - x_1\\ &= 101 - 100\\ &= 1\\ \Delta x_3 &:= x_3 - x_2\\ &= 102 - 101\\ &= 1\end{aligned}$$

（b）

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x_2}{x_1} &= \frac{1}{100}\\ &= 0.01\\ \frac{\Delta x_3}{x_2} &= \frac{1}{101}\\ &\approx 0.0099\end{aligned}$$

（c）

$$\begin{aligned}\ln x_1 &= \ln 100\\ &\approx 4.60517\\ \ln x_2 &= \ln 101\\ &\approx 4.61512\\ \ln x_3 &= \ln 102\\ &\approx 4.62497\end{aligned}$$

（d）

$$\begin{aligned}\Delta \ln x_2 &:= \ln x_2 - \ln x_1\\ &\approx 4.61512 - 4.60517\\ &= 0.00995\\ \Delta \ln x_3 &:= \ln x_3 - \ln x_2\\ &\approx 4.62497 - 4.61512\\ &= 0.00985\end{aligned}$$

2.（a）

$$\begin{aligned}g'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2\\ g''(x) &= f''(a) + f'''(a)(x-a)\\ g'''(x) &= f'''(a)\end{aligned}$$

(b)

$$g(a) = f(a)$$
$$g'(a) = f'(a)$$
$$g''(a) = f''(a)$$
$$g'''(a) = f'''(a)$$

※すなわち $g(.)$ は $x = a$ において 3 階微分係数まで $f(.)$ と等しい.

(c) $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \mathrm{e}^x$ より $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. したがって

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

(d) 前問と同様に考えれば

$$g_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$n \to \infty$ とすると

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

※したがってネイピア数 e は

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \approx 2.718$$