計量経済 II：復習テスト 3

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 10 月 9 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 20 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $\{Y_t\}$ を平均 μ，自己共分散関数 $\gamma(.)$ の共分散定常過程とする．
   （a）$\mathrm{var}(Y_1 + Y_2)$ の定義を書きなさい．

   （b）$[(Y_1 - \mu) + (Y_2 - \mu)]^2$ を展開しなさい．

   （c）$\mathrm{var}(Y_1 + Y_2)$ を $\gamma(0)$ と $\gamma(1)$ で表しなさい．

   （d）$\mathrm{var}((Y_1 + Y_2)/2)$ を $\gamma(0)$ と $\gamma(1)$ で表しなさい．

2. $\{Y_t\}$ を平均 0，分散 σ^2 の iid とする．簡単化のため平均 0 を既知とすると，s 次の標本自己共分散は

$$\hat{\gamma}_T(s) := \frac{1}{T}\sum_{t=s+1}^{T} Y_t Y_{t-s}$$

$s \geq 1$ として以下を示しなさい．

(a)

$$\mathrm{E}(Y_t Y_{t-s}) = 0$$

(b)

$$\mathrm{var}(Y_t Y_{t-s}) = \gamma(0)^2$$

(c) $r \geq 1$ について

$$\mathrm{cov}(Y_t Y_{t-s}, Y_{t-r} Y_{t-s-r}) = 0$$

(d)

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} Y_t Y_{t-s} \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \gamma(0)^2\right)$$

(e)

$$\sqrt{T}\hat{\gamma}_T(s) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \gamma(0)^2\right)$$

解答例

1. (a)

$$\mathrm{var}(Y_1+Y_2) := \mathrm{E}\left((Y_1+Y_2-\mathrm{E}(Y_1+Y_2))^2\right)$$

(b)

$$[(Y_1-\mu)+(Y_2-\mu)]^2 = (Y_1-\mu)^2+2(Y_1-\mu)(Y_2-\mu)+(Y_2-\mu)^2$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(Y_1+Y_2) &:= \mathrm{E}\left((Y_1+Y_2-\mathrm{E}(Y_1+Y_2))^2\right)\\
&= \mathrm{E}\left((Y_1-\mathrm{E}(Y_1)+Y_2-\mathrm{E}(Y_2))^2\right)\\
&= \mathrm{E}\left((Y_1-\mu+Y_2-\mu)^2\right)\\
&= \mathrm{E}\left((Y_1-\mu)^2+2(Y_1-\mu)(Y_2-\mu)+(Y_2-\mu)^2\right)\\
&= \mathrm{E}\left((Y_1-\mu)^2\right)+2\,\mathrm{E}((Y_1-\mu)(Y_2-\mu))+\mathrm{E}\left((Y_2-\mu)^2\right)\\
&= \mathrm{var}(Y_1)+2\,\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)+\mathrm{var}(Y_2)\\
&= \gamma(0)+2\gamma(1)+\gamma(0)\\
&= 2(\gamma(0)+\gamma(1))
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(\frac{Y_1+Y_2}{2}\right) &= \frac{\mathrm{var}(Y_1+Y_2)}{4}\\
&= \frac{2(\gamma(0)+\gamma(1))}{4}\\
&= \frac{\gamma(0)+\gamma(1)}{2}
\end{aligned}$$

2. (a) Y_t と Y_{t-s} は独立なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_tY_{t-s}) &= \mathrm{E}(Y_t)\,\mathrm{E}(Y_{t-s})\\
&= \mathrm{E}(Y_t)\,\mathrm{E}(Y_t)\\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) $\mathrm{E}(Y_tY_{t-s})=0$ なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(Y_tY_{t-s}) &= \mathrm{E}\left((Y_tY_{t-s})^2\right)\\
&= \mathrm{E}\left(Y_t^2Y_{t-s}^2\right)\\
&= \mathrm{E}\left(Y_t^2\right)\mathrm{E}\left(Y_{t-s}^2\right)\\
&= \mathrm{var}(Y_t)\,\mathrm{var}(Y_{t-s})\\
&= \mathrm{var}(Y_t)\,\mathrm{var}(Y_t)\\
&= \gamma(0)^2
\end{aligned}$$

(c) $\mathrm{E}(Y_tY_{t-s})=0$ なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Y_tY_{t-s},Y_{t-r}Y_{t-s-r}) &= \mathrm{E}(Y_tY_{t-s}Y_{t-r}Y_{t-s-r})\\
&= \mathrm{E}(Y_t)\,\mathrm{E}(Y_{t-s}Y_{t-r})\,\mathrm{E}(Y_{t-s-r})\\
&= \mathrm{E}(Y_t)\,\mathrm{E}(Y_{t-s}Y_{t-r})\,\mathrm{E}(Y_t)\\
&= 0
\end{aligned}$$

※ $r = s$ なら $\mathrm{E}(Y_{t-s}Y_{t-r}) \neq \mathrm{E}(Y_{t-s})\,\mathrm{E}(Y_{t-r})$.

（d）以上より $\{Y_t Y_{t-s}\}$ は分散 $\gamma(0)^2$ のホワイト・ノイズなので，（若干の追加的な条件の下で）中心極限定理より結果が成立.

（e）前問より

$$
\begin{aligned}
\sqrt{T}\hat{\gamma}_T(s) &= \sqrt{T}\frac{1}{T}\sum_{t=s+1}^{T} Y_t Y_{t-s} \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=s+1}^{T} Y_t Y_{t-s} \\
&\xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \gamma(0)^2\right)
\end{aligned}
$$