計量経済 II：復習テスト 4

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 10 月 16 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 20 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $\{y_t\}$ を共分散定常な AR(1) とする．すなわち任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= c + \phi y_{t-1} + w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

ただし $|\phi| < 1$．$\{y_t\}$ の自己共分散関数を $\gamma(.)$ とする．

（a）$\mathrm{E}(y_t)$ を求めなさい．

（b）y_t を $w_t, w_{t-1}, \ldots$ で表しなさい．

（c）$\mathrm{cov}(y_{t-1}, w_t)$ を求めなさい．

（d）$\mathrm{cov}(y_t, w_t)$ を求めなさい．

（e）$\gamma(0)$ を $\gamma(1), \phi, \sigma^2$ で表しなさい．

2. $\{y_t\}$ を MA(1) とする．すなわち任意の t について

$$y_t = \mu + w_t - \theta w_{t-1}$$
$$\{w_t\} \sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$$

$\{y_t\}$ の自己共分散関数を $\gamma(.)$，自己相関関数を $\rho(.)$ とする．

(a) $\mathrm{E}(y_t)$ を求めなさい．

(b) $\gamma(0)$ を θ, σ^2 で表しなさい．

(c) $\gamma(1)$ を θ, σ^2 で表しなさい．

(d) $\rho(1)$ を θ で表しなさい．

(e) $\gamma(2)$ を求めなさい．

解答例

1.（a）期待値の線形性と共分散定常性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}(c + \phi y_{t-1} + w_t) \\
&= c + \phi\,\mathrm{E}(y_{t-1}) + \mathrm{E}(w_t) \\
&= c + \phi\,\mathrm{E}(y_t) \\
&= \frac{c}{1-\phi}
\end{aligned}
$$

（b）逐次代入により

$$
\begin{aligned}
y_t &= c + \phi y_{t-1} + w_t \\
&= c + w_t + \phi y_{t-1} \\
&= c + w_t + \phi(c + w_{t-1} + \phi y_{t-2}) \\
&= \dots \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s (c + w_{t-s}) \\
&= c\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s + \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s w_{t-s} \\
&= \frac{c}{1-\phi} + \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s w_{t-s}
\end{aligned}
$$

（c）$\{w_t\}$ は $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なので，前問より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(y_{t-1}, w_t) &= \mathrm{cov}\left(\frac{c}{1-\phi} + w_{t-1} + \phi w_{t-2} + \cdots, w_t\right) \\
&= \mathrm{cov}(w_{t-1} + \phi w_{t-2} + \cdots, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(w_{t-1}, w_t) + \phi\,\mathrm{cov}(w_{t-2}, w_t) + \cdots \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（d）$\{w_t\}$ は $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なので，前問より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(y_t, w_t) &= \mathrm{cov}(c + \phi y_{t-1} + w_t, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(\phi y_{t-1} + w_t, w_t) \\
&= \phi\,\mathrm{cov}(y_{t-1}, w_t) + \mathrm{cov}(w_t, w_t) \\
&= \mathrm{var}(w_t) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

（e）前問より

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &:= \mathrm{var}(y_t) \\
&= \mathrm{cov}(y_t, y_t) \\
&= \mathrm{cov}(y_t, c + \phi y_{t-1} + w_t) \\
&= \mathrm{cov}(y_t, \phi y_{t-1} + w_t) \\
&= \phi\,\mathrm{cov}(y_t, y_{t-1}) + \mathrm{cov}(y_t, w_t) \\
&= \phi\gamma(1) + \sigma^2
\end{aligned}
$$

2.（a）期待値の線形性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}(\mu + w_t - \theta w_{t-1}) \\
&= \mu + \mathrm{E}(w_t) - \theta\,\mathrm{E}(w_{t-1}) \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

（b）$\{w_t\}$ は $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なので

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &:= \mathrm{var}(y_t) \\
&= \mathrm{var}(\mu + w_t - \theta w_{t-1}) \\
&= \mathrm{var}(w_t - \theta w_{t-1}) \\
&= \mathrm{var}(w_t) - 2\,\mathrm{cov}(w_t, \theta w_{t-1}) + \mathrm{var}(\theta w_{t-1}) \\
&= \mathrm{var}(w_t) + \theta^2\,\mathrm{var}(w_{t-1}) \\
&= \mathrm{var}(w_t) + \theta^2\,\mathrm{var}(w_t) \\
&= \left(1 + \theta^2\right)\sigma^2
\end{aligned}
$$

（c）$\{w_t\}$ は $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なので

$$
\begin{aligned}
\gamma(1) &:= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-1}) \\
&= \mathrm{cov}(\mu + w_t - \theta w_{t-1}, \mu + w_{t-1} - \theta w_{t-2}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t - \theta w_{t-1}, w_{t-1} - \theta w_{t-2}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t - \theta w_{t-1}, w_{t-1}) - \mathrm{cov}(w_t - \theta w_{t-1}, \theta w_{t-2}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t, w_{t-1}) - \mathrm{cov}(\theta w_{t-1}, w_{t-1}) - \mathrm{cov}(w_t, \theta w_{t-2}) + \mathrm{cov}(\theta w_{t-1}, \theta w_{t-2}) \\
&= -\theta\,\mathrm{cov}(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&= -\theta\,\mathrm{var}(w_{t-1}) \\
&= -\theta\sigma^2
\end{aligned}
$$

（d）前 2 問より

$$
\begin{aligned}
\rho(1) &= \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} \\
&= \frac{-\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2} \\
&= -\frac{\theta}{1+\theta^2}
\end{aligned}
$$

（e）$\{w_t\}$ は $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なので

$$
\begin{aligned}
\gamma(2) &:= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-2}) \\
&= \mathrm{cov}(\mu + w_t - \theta w_{t-1}, \mu + w_{t-2} - \theta w_{t-3}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t - \theta w_{t-1}, w_{t-2} - \theta w_{t-3}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t - \theta w_{t-1}, w_{t-2}) - \mathrm{cov}(w_t - \theta w_{t-1}, \theta w_{t-3}) \\
&= \mathrm{cov}(w_t, w_{t-2}) - \mathrm{cov}(\theta w_{t-1}, w_{t-2}) - \mathrm{cov}(w_t, \theta w_{t-3}) + \mathrm{cov}(\theta w_{t-1}, \theta w_{t-3}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$