計量経済 II：復習テスト 5

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 10 月 23 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を左上でホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 20 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 時系列 $(y_1, \ldots, y_T)$ に定数項なしの正規 AR(1) モデルを仮定する．すなわち $t = 1, \ldots, T$ について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

ただし $|\phi| < 1$．※ $\mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right)$ は独立な $\mathrm{N}\left(0, \sigma^2\right)$ の意味．

（a） $\mathrm{E}(y_t)$ を求めなさい．

（b） $\mathrm{var}(y_t)$ を求めなさい．

（c） y_t の周辺 pdf を求めなさい．

2. 引き続き前問の状況を考える．

(a) $\mathrm{E}(y_t|y_{t-1},\dots,y_1)$ を求めなさい．

(b) $\mathrm{var}(y_t|y_{t-1},\dots,y_1)$ を求めなさい．

(c) $(y_{t-1},\dots,y_1)$ を所与とした y_t の条件つき pdf を求めなさい．

(d) 予測誤差分解を用いて y_1 を所与とした $(y_2,\dots,y_T)$ の条件つき同時 pdf を求めなさい．（ヒント：確率の乗法定理と同じ）

解答例

1. (a) 期待値の線形性と $\{y_t\}$ の共分散定常性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}(\phi y_{t-1} + w_t) \\
&= \phi\,\mathrm{E}(y_{t-1}) + \mathrm{E}(w_t) \\
&= \phi\,\mathrm{E}(y_t) + \mathrm{E}(w_t) \\
&= \frac{\mathrm{E}(w_t)}{1-\phi}
\end{aligned}
$$

$\{w_t\} \sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right)$ より分子は 0，$|\phi| < 1$ より分母は 0 でないので，$\mathrm{E}(y_t) = 0$.

(b) 和の分散の展開公式，$\{w_t\} \sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right)$ であること，および $\{y_t\}$ の共分散定常性より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(y_t) &= \operatorname{var}(\phi y_{t-1} + w_t) \\
&= \operatorname{var}(\phi y_{t-1}) + 2\operatorname{cov}(\phi y_{t-1}, w_t) + \operatorname{var}(w_t) \\
&= \phi^2 \operatorname{var}(y_{t-1}) + \sigma^2 \\
&= \phi^2 \operatorname{var}(y_t) + \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}
$$

(c) y_t は正規分布の線形変換なので正規分布．したがって前 2 問より

$$
y_t \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)
$$

この分布の pdf は，任意の y について

$$
f(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/\left(1-\phi^2\right)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2/\left(1-\phi^2\right)}\right)
$$

2. (a) 期待値の線形性と $\{w_t\}$ が iid であることより

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_t|y_{t-1},\dots,y_1) &= \mathrm{E}(\phi y_{t-1} + w_t|y_{t-1},\dots,y_1) \\
&= \phi y_{t-1} + \mathrm{E}(w_t|y_{t-1},\dots,y_1) \\
&= \phi y_{t-1} + \mathrm{E}(w_t) \\
&= \phi y_{t-1}
\end{aligned}
$$

(b) y_{t-1} が所与，$\{w_t\}$ が iid であることより

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(y_t|y_{t-1},\dots,y_1) &= \operatorname{var}(\phi y_{t-1} + w_t|y_{t-1},\dots,y_1) \\
&= \operatorname{var}(w_t|y_{t-1},\dots,y_1) \\
&= \operatorname{var}(w_t) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

(c) y_t は正規分布の線形変換なので正規分布．したがって前 2 問より

$$
y_t|y_{t-1},\dots,y_1 \sim \mathrm{N}\left(\phi y_{t-1}, \sigma^2\right)
$$

この分布の pdf は，任意の y について

$$
f(y|y_{t-1},\dots,y_1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)
$$

（d）予測誤差分解と前問の結果より

$$
\begin{aligned}
f(y_2, \ldots, y_T | y_1) &= f(y_T | y_{T-1}, \ldots, y_1) \cdots f(y_2 | y_1) \\
&= \prod_{t=2}^{T} f(y_t | y_{t-1}, \ldots, y_1) \\
&= \prod_{t=2}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right)
\end{aligned}
$$