計量経済 II：復習テスト 6

学籍番号____________________氏名____________________

2023 年 10 月 30 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を左上でホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 20 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 確率過程 $\{Y_t\}$ の h 期先予測を考える．時点 t までの観測値を所与とした Y_{t+h} の予測子を $\hat{Y}_{t+h|t}$，条件付き期待値を $\mathrm{E}_t(.)$，条件付き分散を $\mathrm{var}_t(.)$ と書く．

（a）$\hat{Y}_{t+h|t}$ の MSE を定義しなさい．

（b）次式を示しなさい．

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) = \mathrm{var}_t(Y_{t+h}) + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2$$

（c）2 次の損失関数の下で $\hat{Y}_{t+h|t} := \mathrm{E}_t(Y_{t+h})$ が最適予測となる理由を説明しなさい．

2. $\{y_t\}$ を定数項なしの AR(2) 過程とする．すなわち任意の t について

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t$$
$$\{w_t\} \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right)$$

$\{w_t\}$ は iid，母数は既知と仮定する．

(a) $\mathrm{E}_t(y_{t+1})$ を求めなさい．

(b) $\mathrm{E}_t(y_{t+2})$ を求めなさい．

(c) $\mathrm{var}_t(y_{t+1})$ を求めなさい．

(d) $\mathrm{var}_t(y_{t+2})$ を求めなさい．

解答例

1. (a)

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) := \mathrm{E}_t\left(\left(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}\right)^2\right)$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MSE}\left(\hat{Y}_{t+h|t}\right) \\
&= \mathrm{E}_t\left(\left(Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}) - \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)\right)^2\right) \\
&= \mathrm{E}_t\left((Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))^2 - 2(Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right) + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2\right) \\
&= \mathrm{E}_t\left((Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))^2\right) - 2\,\mathrm{E}_t\left((Y_{t+h} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)\right) \\
&\quad + \mathrm{E}_t\left(\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2\right) \\
&= \mathrm{var}_t(Y_{t+h}) - 2(\mathrm{E}_t(Y_{t+h}) - \mathrm{E}_t(Y_{t+h}))\left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right) + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2 \\
&= \mathrm{var}_t(Y_{t+h}) + \left(\hat{Y}_{t+h|t} - \mathrm{E}_t(Y_{t+h})\right)^2
\end{aligned}$$

(c) 2 次の損失関数なら MSE が最小の予測子が最適．前問より $\hat{Y}_{t+h|t} := \mathrm{E}_t(Y_{t+h})$ なら MSE は最小．

2. (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + w_{t+1}) \\
&= \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \mathrm{E}_t(w_{t+1})
\end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{E}_t(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_{t+1}) = \mathrm{E}(w_t) = 0$$

(b) 前問より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+2}) &= \mathrm{E}_t(\phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + w_{t+2}) \\
&= \phi_1\,\mathrm{E}_t(y_{t+1}) + \phi_2 y_t + \mathrm{E}_t(w_{t+2}) \\
&= \phi_1(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1}) + \phi_2 y_t + \mathrm{E}(w_{t+2}) \\
&= \left(\phi_1^2 + \phi_2\right) y_t + \phi_1\phi_2 y_{t-1}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(\phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + w_{t+1}) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1})
\end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\mathrm{var}_t(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_{t+1}) = \mathrm{var}(w_t) = \sigma^2$$

（d）前問より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}_t(y_{t+2}) &= \operatorname{var}_t(\phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + w_{t+2}) \\
&= \operatorname{var}_t(\phi_1 y_{t+1} + w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2 \operatorname{var}_t(y_{t+1}) + \operatorname{var}_t(w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2 \sigma^2 + \operatorname{var}(w_{t+2}) \\
&= \phi_1^2 \sigma^2 + \sigma^2 \\
&= \left(1 + \phi_1^2\right) \sigma^2
\end{aligned}
$$