計量経済 II：復習テスト 7

学籍番号___________________氏名___________________

2023 年 11 月 6 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を左上でホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 20 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $\{(x_t, y_t, z_t)'\}$ に関する定数項なしの 3 変量 VAR(p) モデルは，任意の t について

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(\mathrm{L}) & \phi_{xy}(\mathrm{L}) & \phi_{xz}(\mathrm{L}) \\ \phi_{yx}(\mathrm{L}) & \phi_{yy}(\mathrm{L}) & \phi_{yz}(\mathrm{L}) \\ \phi_{zx}(\mathrm{L}) & \phi_{zy}(\mathrm{L}) & \phi_{zz}(\mathrm{L}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} \right\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

（a）$p = 1$ として各式をラグ多項式を使わずに書きなさい．

（b）$p = 2$ として各式をラグ多項式を使わずに書きなさい．

2. $\{(x_t, y_t)'\}$ に関する定数項なしの 2 変量 VAR(1) モデルは，任意の t について

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \right\} \sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})$$

ただし

$$\boldsymbol{\Phi} := \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} \end{bmatrix}$$

$\{(u_t, v_t)'\}$ は iid とする．

(a) $\mathrm{E}_t(x_{t+1})$ を求めなさい．

(b) $\boldsymbol{\Phi}^2$ を求めなさい．

(c) $\mathrm{E}_t(x_{t+2})$ を求めなさい．

解答例

1. (a) 各式をベクトル・行列を使わずに書くと，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(\mathrm{L})x_t + \phi_{xy}(\mathrm{L})y_t + \phi_{xz}(\mathrm{L})z_t &= u_t\\ \phi_{yx}(\mathrm{L})x_t + \phi_{yy}(\mathrm{L})y_t + \phi_{yz}(\mathrm{L})z_t &= v_t\\ \phi_{zx}(\mathrm{L})x_t + \phi_{zy}(\mathrm{L})y_t + \phi_{zz}(\mathrm{L})z_t &= w_t\end{aligned}$$

ラグ多項式を使わずに書くと，任意の t について

$$\begin{aligned}x_t &= \sum_{s=1}^{p}\phi_{xx,s}x_{t-s} + \sum_{s=1}^{p}\phi_{xy,s}y_{t-s} + \sum_{s=1}^{p}\phi_{xz,s}z_{t-s} + u_t\\ y_t &= \sum_{s=1}^{p}\phi_{yx,s}x_{t-s} + \sum_{s=1}^{p}\phi_{yy,s}y_{t-s} + \sum_{s=1}^{p}\phi_{yz,s}z_{t-s} + v_t\\ z_t &= \sum_{s=1}^{p}\phi_{zx,s}x_{t-s} + \sum_{s=1}^{p}\phi_{zy,s}y_{t-s} + \sum_{s=1}^{p}\phi_{zz,s}z_{t-s} + w_t\end{aligned}$$

$p = 1$ なら任意の t について

$$\begin{aligned}x_t &= \phi_{xx}x_{t-1} + \phi_{xy}y_{t-1} + \phi_{xz}z_{t-1} + u_t\\ y_t &= \phi_{yx}x_{t-1} + \phi_{yy}y_{t-1} + \phi_{yz}z_{t-1} + v_t\\ z_t &= \phi_{zx}x_{t-1} + \phi_{zy}y_{t-1} + \phi_{zz}z_{t-1} + w_t\end{aligned}$$

(b) 前問と同様に $p = 2$ なら任意の t について

$$\begin{aligned}x_t &= \phi_{xx,1}x_{t-1} + \phi_{xx,2}x_{t-2} + \phi_{xy,1}y_{t-1} + \phi_{xy,2}y_{t-2} + \phi_{xz,1}z_{t-1} + \phi_{xz,2}z_{t-2} + u_t\\ y_t &= \phi_{yx,1}x_{t-1} + \phi_{yx,2}x_{t-2} + \phi_{yy,1}y_{t-1} + \phi_{yy,2}y_{t-2} + \phi_{yz,1}z_{t-1} + \phi_{yz,2}z_{t-2} + v_t\\ z_t &= \phi_{zx,1}x_{t-1} + \phi_{zx,2}x_{t-2} + \phi_{zy,1}y_{t-1} + \phi_{zy,2}y_{t-2} + \phi_{zz,1}z_{t-1} + \phi_{zz,2}z_{t-2} + w_t\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix}x_{t+1}\\ y_{t+1}\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix}x_t\\ y_t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_{t+1}\\ v_{t+1}\end{pmatrix}\right)\\ &= \boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix}x_t\\ y_t\end{pmatrix} + \mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix}u_{t+1}\\ v_{t+1}\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\phi_{xx} & \phi_{xy}\\ \phi_{yx} & \phi_{yy}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_t\\ y_t\end{pmatrix} + \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix}u_{t+1}\\ v_{t+1}\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}\phi_{xx}x_t + \phi_{xy}y_t\\ \phi_{yx}x_t + \phi_{yy}y_t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{E}_t(x_{t+1}) = \phi_{xx}x_t + \phi_{xy}y_t$.

(b)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^2 &= \begin{bmatrix}\phi_{xx} & \phi_{xy}\\ \phi_{yx} & \phi_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{xx} & \phi_{xy}\\ \phi_{yx} & \phi_{yy}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\phi_{xx}^2 + \phi_{xy}\phi_{yx} & \phi_{xx}\phi_{xy} + \phi_{xy}\phi_{yy}\\ \phi_{yx}\phi_{xx} + \phi_{yy}\phi_{yx} & \phi_{yx}\phi_{xy} + \phi_{yy}^2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

（c）前問より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} x_{t+2} \\ y_{t+2} \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t+2} \\ v_{t+2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix}\right) + \mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} u_{t+2} \\ v_{t+2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) + \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} u_{t+2} \\ v_{t+2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{\Phi}^2\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \mathrm{E}_t\left(\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \phi_{xx}^2 + \phi_{xy}\phi_{yx} & \phi_{xx}\phi_{xy} + \phi_{xy}\phi_{yy} \\ \phi_{yx}\phi_{xx} + \phi_{yy}\phi_{yx} & \phi_{yx}\phi_{xy} + \phi_{yy}^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \left(\phi_{xx}^2 + \phi_{xy}\phi_{yx}\right)x_t + (\phi_{xx}\phi_{xy} + \phi_{xy}\phi_{yy})y_t \\ (\phi_{yx}\phi_{xx} + \phi_{yy}\phi_{yx})x_t + \left(\phi_{yx}\phi_{xy} + \phi_{yy}^2\right)y_t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって $\mathrm{E}_t(x_{t+2}) = \left(\phi_{xx}^2 + \phi_{xy}\phi_{yx}\right)x_t + (\phi_{xx}\phi_{xy} + \phi_{xy}\phi_{yy})y_t$.