計量経済 II：復習テスト 8

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 11 月 13 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を左上でホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 20 日の予定）にまとめて提出すること．

1. （対称行列のコレスキー分解）以下の行列を定義する．

$$\boldsymbol{\Sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} := \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

ただし $\boldsymbol{\Sigma}$ は対称で正定値とする．

(a) $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$ を計算しなさい．

(b) $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$ とする．$\boldsymbol{\Sigma}$ の各成分を $\boldsymbol{L}$ の成分で表しなさい．

(c) $l_{11}, l_{22} > 0$ とする．$\boldsymbol{L}$ の各成分を $\boldsymbol{\Sigma}$ の成分で表しなさい．

2. $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を平均 $\mathbf{0}$ の共分散定常な N 変量 VAR(1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t \\ \{\boldsymbol{w}_t\} &\sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$ とコレスキー分解し，$\boldsymbol{z}_t := \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{w}_t$ と直交化する．

(a) $\mathrm{var}(\boldsymbol{z}_t) = \boldsymbol{I}_N$ を示しなさい．

(b)（VMA 表現）VAR(1) を反転して $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を $\{\boldsymbol{w}_t\}$ で表現しなさい．

(c)（構造 VMA 表現）$\{\boldsymbol{y}_t\}$ を $\{\boldsymbol{z}_t\}$ で表現しなさい．

(d) $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の $\boldsymbol{z}_t$ に対する第 0 期のインパルス応答 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{z}_t$ の各成分を書きなさい．

解答例

1.（a）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}' &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

（b）

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= l_{11}^2 \\ \sigma_{12} &= l_{11}l_{21} \\ \sigma_{21} &= l_{21}l_{11} \\ \sigma_2^2 &= l_{21}^2 + l_{22}^2\end{aligned}$$

（c）$l_{11} > 0$ なので前問の第 1 式より

$$l_{11} = \sigma_1$$

これを第 2, 3 式に代入すると

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \sigma_1 l_{21} \\ \sigma_{21} &= l_{21}\sigma_1\end{aligned}$$

したがって

$$l_{21} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{21}}{\sigma_1}$$

これを第 4 式に代入すると

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} + l_{22}^2$$

したがって $l_{22} > 0$ より

$$l_{22} = \sqrt{\sigma_2^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}$$

2.（a）

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\boldsymbol{z}_t) &= \operatorname{var}\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{w}_t\right) \\ &= \boldsymbol{L}^{-1}\operatorname{var}\left(\boldsymbol{w}_t\right)\boldsymbol{L}^{-1\prime} \\ &= \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{L}^{-1\prime} \\ &= \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L}^{-1\prime} \\ &= \boldsymbol{L}'\boldsymbol{L}^{-1\prime} \\ &= \left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}\right)' \\ &= \boldsymbol{I}_N\end{aligned}$$

※以下の 2 つの公式を使用している（第 7 回講義メモ参照）.

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{A}\operatorname{var}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}' \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})' &= \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'\end{aligned}$$

（b）逐次代入により，任意の t について

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t \\
&= \boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t-1} \\
&= \boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{w}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_{t-2}) \\
&= \boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{y}_{t-2} \\
&= \dots \\
&= \boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{w}_{t-2} + \cdots
\end{aligned}$$

（c）$\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{L}\boldsymbol{z}_t$ を代入すると，任意の t について

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{L}\boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{L}\boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{L}\boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots$$

（d）

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}\boldsymbol{z}_t &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & l_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_{t,1} \\ z_{t,2} \\ \vdots \\ z_{t,N} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_{11}z_{t,1} \\ l_{21}z_{t,1} + l_{22}z_{t,2} \\ \vdots \\ l_{N1}z_{t,1} + l_{N2}z_{t,2} + \cdots + l_{NN}z_{t,N} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$