計量経済 II：復習テスト 9

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 11 月 27 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 29 日の予定）に提出すること．

1. 大きさ n の $(1+k)$ 変量データを $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ とする．$\boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{X}$ 上への古典的正規線形回帰モデルは

$$\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n\right)$$

$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\boldsymbol{b}$ とすると $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$．$\boldsymbol{R}$ を $r \times k$ 行列とする．以下を示しなさい．

(a)

$$\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\right)$$

(b)

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right)$$

(c)

$$\left[\sigma^2 \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1/2} (\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_r)$$

(d)

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta})' \left[\sigma^2 \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1} (\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(r)$$

2. 前問のモデルで次の検定問題を考える．

$$H_0 : \boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{c} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{R\beta} \neq \boldsymbol{c}$$

残差ベクトルを $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Xb}$ とする．$\boldsymbol{X}$ を所与として $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{e}$ は独立.

(a) σ^2 の不偏推定量 s^2 を式で定義しなさい.

(b) $(n-k)s^2/\sigma^2$ はどのような分布をもつか？

(c) F 検定統計量を定義しなさい.

(d) H_0 の下で $F \sim \mathrm{F}(r, n-k)$ となることを示しなさい.

解答例

1. (a) $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n\right)$ の線形変換だから（条件付き）正規分布.（条件付き）期待値は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{E}\left((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}\right) \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\,\mathrm{E}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

（条件付き）分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{var}\left((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}\right) \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\,\mathrm{var}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\sigma^2\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\end{aligned}$$

(b) $\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\right)$ の線形変換だから（条件付き）正規分布.（条件付き）期待値は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{R}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) \\ &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

（条件付き）分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{R}\,\mathrm{var}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X})\boldsymbol{R}' \\ &= \boldsymbol{R}\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}' \\ &= \sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\end{aligned}$$

(c) 前問の結果を中心化すると

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right)$$

標準化すると

$$\left[\sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1/2}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_r)$$

(d) $\boldsymbol{z} := \left[\sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1/2}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta})$ とすると

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta})'\left[\sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}$$

$\boldsymbol{z} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_r)$ より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} &= z_1^2 + \cdots + z_r^2 \\ &\sim \chi^2(r)\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}s^2 &:= \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n-k} \\ &= \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n} e_i^2\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2}|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(n-k)$$

(c) 1(d) の $\boldsymbol{R\beta}$ を $\boldsymbol{c}$，σ^2 を s^2 に置き換えて，自由度 r で割ればよいので

$$F := \frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{c})' \left[s^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1} (\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{c})}{r}$$

(d) H_0 の下で

$$\begin{aligned} F &:= \frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{c})' \left[s^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1} (\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{c})}{r} \\ &= \frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})' \left[s^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1} (\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})}{r} \\ &= \frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})' \left[\sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1} (\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})/r}{[(n-k)s^2/\sigma^2]/(n-k)} \end{aligned}$$

以下を示せばよい.

i. 分子：$(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})' \left[\sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1} (\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(r)$

ii. 分母：$(n-k)s^2/\sigma^2|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(n-k)$

iii. $\boldsymbol{X}$ を所与として分子と分母は独立

i は 1(d)，ii は 2(b) で示した．また分子は $\boldsymbol{b}$ の関数，分母は $\boldsymbol{e}$ の関数で，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{e}$ は独立なので（詳細は略）iii も成立.