計量経済 II：復習テスト 12

学籍番号____________________氏名____________________

2024 年 1 月 15 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 29 日の予定）に提出すること．

1. 定数項なしの AR(p) モデルは，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})y_t &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)\end{aligned}$$

(a) 次式を示しなさい．

$$\phi(\mathrm{L}) = \phi(1)\mathrm{L} + \phi^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})$$

ただし $\phi^*(\mathrm{L})$ は $p-1$ 次のラグ多項式．

(b) AR モデルが次式に変形できることを示しなさい．

$$\phi^*(\mathrm{L})\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + w_t$$

(c) $\{y_t\}$ が I(1) なら $\phi(1)=0$ すなわち $\phi(.)$ が単位根をもつことを示しなさい．

2. $\{\boldsymbol{y}_t\}$ を CI$(1,1)$ とする．定数項・トレンドありの VAR(p) モデルは，任意の t について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\delta}t)&=\boldsymbol{w}_t\\ \{\boldsymbol{w}_t\}&\sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})\end{aligned}$$

(a) 次式を示しなさい．

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})=\boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L}+\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})$$

ただし $\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})$ は $p-1$ 次のラグ多項式行列．

(b) VAR モデルが次式に変形できることを示しなさい．

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\delta})=-\boldsymbol{\Phi}(1)[\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\delta}(t-1)]+\boldsymbol{w}_t$$

(c) 共和分行列 $\boldsymbol{\Gamma}$ を用いて VAR モデルが次式に変形できることを示しなさい．

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\delta})=-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'[\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\delta}(t-1)]+\boldsymbol{w}_t$$

(d) VAR モデルが次の VECM に変形できることを示しなさい．

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\delta})=-\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}(t-1)]+\boldsymbol{w}_t$$

解答例

1. (a) $\phi(\mathrm{L})$ を式変形すると

$$\phi(\mathrm{L}) = \phi(1)\mathrm{L} + \phi(\mathrm{L}) - \phi(1)\mathrm{L}$$

$\phi(z) - \phi(1)z$ は $z = 1$ で 0 なので，因数分解より任意の z について

$$\phi(z) - \phi(1)z = \phi^*(z)(1 - z)$$

ただし $\phi^*(.)$ は $p - 1$ 次の多項式．したがって

$$\phi(\mathrm{L}) = \phi(1)\mathrm{L} + \phi^*(\mathrm{L})(1 - \mathrm{L})$$

(b) 前問の結果を代入すると，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})y_t &= [\phi(1)\mathrm{L} + \phi^*(\mathrm{L})(1 - \mathrm{L})]y_t \\ &= \phi(1)\mathrm{L}y_t + \phi^*(\mathrm{L})(1 - \mathrm{L})y_t \\ &= \phi(1)y_{t-1} + \phi^*(\mathrm{L})\Delta y_t\end{aligned}$$

これを AR モデルに代入すると，任意の t について

$$\phi(1)y_{t-1} + \phi^*(\mathrm{L})\Delta y_t = w_t$$

すなわち

$$\phi^*(\mathrm{L})\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + w_t$$

(c) $\{y_t\}$ が I(1) なら $\{\Delta y_t\}$ は I(0) なので左辺は I(0)．したがって右辺も I(0) なので $\phi(1) = 0$.

2. (a) $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})$ の第 (i, j) 成分 $\phi_{i,j}(\mathrm{L})$ を式変形すると

$$\phi_{i,j}(\mathrm{L}) = \phi_{i,j}(1)\mathrm{L} + \phi_{i,j}(\mathrm{L}) - \phi_{i,j}(1)\mathrm{L}$$

$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z$ は $z = 1$ で 0 なので，因数分解より任意の z について

$$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z = \phi^*_{i,j}(z)(1 - z)$$

ただし $\phi^*_{i,j}(.)$ は $p - 1$ 次の多項式．したがって

$$\phi_{i,j}(\mathrm{L}) = \phi_{i,j}(1)\mathrm{L} + \phi^*_{i,j}(\mathrm{L})(1 - \mathrm{L})$$

(b) 前問の結果を代入すると，任意の t について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}t) &= [\boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L} + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1 - \mathrm{L})](\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}t) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}t) + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1 - \mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}t) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(1)[\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}(t-1)] + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\delta})\end{aligned}$$

これを VAR モデルに代入すると，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}(1)[\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}(t-1)] + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{w}_t$$

すなわち

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\delta}) = -\boldsymbol{\Phi}(1)[\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}(t-1)] + \boldsymbol{w}_t$$

(c) $\{\boldsymbol{y}_t\}$ が I(1) なら $\{\Delta \boldsymbol{y}_t\}$ は I(0) なので左辺は I(0)．したがって右辺も I(0)．共和分より $\{\boldsymbol{\Gamma}'(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta} t)\}$ が I(0) なので

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta \boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\delta}) = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'[\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}(t-1)] + \boldsymbol{w}_t$$

(d) 前問の結果を式変形すると，任意の t について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta \boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\delta}) &= -\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\delta}(t-1)] + \boldsymbol{w}_t \\ &= -\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}(t-1)] + \boldsymbol{w}_t\end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{\alpha} := \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\delta}$.