計量経済 II：復習テスト 13

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 1 月 22 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜13 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 29 日の予定）に提出すること．

1. $\{w_t\}$ を ARCH(1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} w_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= c + \alpha w_{t-1}^2 \\ \{z_t\} &\sim \mathrm{IID}(0,1) \end{aligned}$$

ただし $c > 0$, $\alpha \in [0,1)$.

(a) $\mathrm{E}_{t-1}(w_t) = 0$ を示しなさい．

(b) $\mathrm{var}_{t-1}(w_t) = \sigma_t^2$ を示しなさい．

(c) $\mathrm{E}(w_t) = 0$ を示しなさい．

(d) $\mathrm{var}(w_t) = \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right)$ を示しなさい．

(e) $\mathrm{var}(w_t)$ を求めなさい．

2. $\{w_t\}$ を GARCH$(1,1)$ 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} w_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \{z_t\} &\sim \mathrm{IID}(0,1) \end{aligned}$$

ただし $c > 0$, $\alpha, \beta \in [0,1)$, $\alpha + \beta < 1$.

(a) $\mathrm{var}_{t-1}(w_t)$ を $w_{t-1}, w_{t-2}, \ldots$ で表しなさい.

(b) $\mathrm{var}(w_t)$ を求めなさい.

(c) 任意の t について $v_t := w_t^2 - \sigma_t^2$ とする．$\{v_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\left\{w_t^2\right\}$ は ARMA$(1,1)$ であることを示しなさい.

解答例

1. (a) 時点 $t-1$ で σ_t^2 は既知であり，$\{z_t\}$ は $\mathrm{IID}(0,1)$ なので，任意の t について

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t-1}(w_t) &= \mathrm{E}_{t-1}(\sigma_t z_t) \\
&= \sigma_t \mathrm{E}_{t-1}(z_t) \\
&= \sigma_t \mathrm{E}(z_t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) 前問より任意の t について

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_{t-1}(w_t) &= \mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}_{t-1}\left(\sigma_t^2 z_t^2\right) \\
&= \sigma_t^2 \mathrm{E}_{t-1}\left(z_t^2\right) \\
&= \sigma_t^2 \mathrm{E}\left(z_t^2\right) \\
&= \sigma_t^2 \mathrm{var}(z_t) \\
&= \sigma_t^2
\end{aligned}$$

(c) 前々問と繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(w_t) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}(w_t)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(d) 前 2 問と繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(w_t) &= \mathrm{E}\left(w_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2\right)\right) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{var}_{t-1}(w_t)) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right)
\end{aligned}$$

(e) 前問より

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(w_t) &= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(c + \alpha w_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha \mathrm{E}\left(w_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha \mathrm{var}(w_{t-1}) \\
&= c + \alpha \mathrm{var}(w_t) \\
&= \frac{c}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

2. (a) Q1(b) より任意の t について

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_{t-1}(w_t) &= \sigma_t^2 \\
&= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\
&= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta\left(c + \alpha w_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2\right) \\
&= (1+\beta)c + \alpha\left(w_{t-1}^2 + \beta w_{t-2}^2\right) + \beta^2 \sigma_{t-2}^2 \\
&= \dots \\
&= \left(1 + \beta + \beta^2 + \cdots\right) c + \alpha\left(w_{t-1}^2 + \beta w_{t-2}^2 + \beta^2 w_{t-3}^2 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

(b) Q1(d) より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(w_t) &= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha\,\mathrm{E}\left(w_{t-1}^2\right) + \beta\,\mathrm{E}\left(\sigma_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha\operatorname{var}(w_{t-1}) + \beta\operatorname{var}(w_{t-1}) \\
&= c + (\alpha+\beta)\operatorname{var}(w_{t-1}) \\
&= c + (\alpha+\beta)\operatorname{var}(w_t) \\
&= \frac{c}{1-\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

(c) 任意の t について

$$
\begin{aligned}
w_t^2 &\equiv \sigma_t^2 + v_t \\
&= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + v_t \\
&= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta w_{t-1}^2 - \beta w_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + v_t \\
&= c + (\alpha+\beta)w_{t-1}^2 - \beta\left(w_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right) + v_t \\
&= c + (\alpha+\beta)w_{t-1}^2 + v_t - \beta v_{t-1}
\end{aligned}
$$

したがって $\{v_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\left\{w_t^2\right\}$ は ARMA$(1,1)$.