

景気指数の統計的基礎*

村澤 康友

2007年7月25日

1 はじめに

景気指数とは「景気」を測る指数である。したがって景気指数の統計的基礎を論じるためには、まず「景気」を明確に定義する必要がある。景気指数を「景気」の推定量（値）と解釈すれば、様々な指数を統一的な観点から比較・評価できる。本稿では「景気」を「月次実質 GDP」と定義し、その推定値を新しい景気指数として提案する。新しい指数は従来の指数の自然な拡張として理解できる。

Stock and Watson (1989, 1991) は「景気 (state of the economy)」を「景気の一致指標の背後に存在する共通因子」と定義した。^{*1} そして一致指標に 1 因子モデルを仮定し、共通因子の最尤推定値を新しい景気指数として提案した。このストック = ワトソン指数は従来の記述統計的な指数と異なり、「景気」の推定値と解釈できる画期的な指数である。^{*2} ただし共通因子はそのままでは経済変数として意味をもたないので、ストック = ワトソン指数が表す「景気」の解釈には注意が必要である。また共通因子の平均と分散は識別されず（通常は平均 0、分散 1 などとする）、識別の与え方により指数の動きが異なるという問題がある。

「景気」の最も自然な定義は「経済活動の水準」であろう。マクロの経済活動の水準は実質 GDP で測るのが通例なので（生産・分配・支出のいずれの面からも等しい）、実質 GDP の推計値があれば景気指数は不要とも言える。しかし GDP は四半期系列であり速報性が低い。そのため月次実質 GDP の代理変数として景気指数が必要となる。すなわち景気指数の作成は月次実質 GDP の推定と本質的に同義なのである。^{*3}

Mariano and Murasawa (2003) はストック = ワトソン指数を月次実質 GDP の推定値と解釈できる形に拡張した。さらに Mariano and Murasawa (2004) は 1 因子モデルにこだわらず、VAR モデルや多因子モデルによる月次実質 GDP の推定を提案した。景気指標の 1 つとして月次実質 GDP の推計には従来から関心がもたれていたが、それが景気指数そのものであることを示したのが彼らの研究のポイントである。

* 本稿の作成にあたり「景気循環日付研究会」のメンバーから有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝する。本研究は科学研究費補助金・基盤研究 (A)(1) 「景気循環論の理論的・実証的再考察と景気判断モデルの構築」および若手研究 (B) 「月次と四半期の系列を用いた DI 型・CI 型景気指数の開発」の援助を受けている。

*1 この定義は同語反復的である。

*2 以来 14 年 6 ヶ月に渡って彼ら自身で指数を作成・公表してきたが、その役割を終えたとして 2004 年 6 月に公表を中止した。

*3 Burns and Mitchell (1946, pp. 72-73) は次のように書いている。

“Aggregate activity can be given a definite meaning and made conceptually measurable by identifying it with gross national product at current prices. . . Unfortunately, no satisfactory series of any of these types is available by months or quarters for periods approximating those we seek to cover.”

ここから彼らは観測可能な複数の月次・四半期系列を用いて景気の「転換点」を決定することを主張している。逆にいえば、もし月次 GDP が観測可能なら、それのみで「転換点」を決定できると考えている。アメリカの景気基準日付を決定・公表する NBER (全米経済研究所) も 2003 年 10 月 21 日付けの公表資料 “The NBER’s Recession Dating Procedure” で同様の考えを述べている。

実質 GDP を含めマクロ経済時系列の多くには共通した循環変動が見られる。この「景気循環」について多くの国で公的機関が景気の「山」「谷」すなわち「転換点」を決定・公表している。そのため「転換点」をとらえることも景気指数の重要な役割と考えられている。しかし後述するように「転換点」という概念は必ずしも明確ではなく、その定義について2つの立場が対立している。そこで本稿では定義の問題には深入りせず、公的機関が決定する景気の「転換点」または「局面」の予測の問題のみを考える。

本稿の構成は以下の通りである。まず第2節で「景気」の定義を与え、その「水準」の測り方と「転換点」の決め方に関する問題点を整理する。次に第3節で景気指数を景気の「水準」を推定するCI型指数と「局面」を推定するDI型指数に分類し、それぞれの役割を明確にする。続いて第4節で月次実質GDPの推定の観点からCI型指数を、第5節で景気拡張（後退）確率の推定の観点からDI型指数を比較・検討する。最後に第6節でまとめと今後の課題を述べる。

2 景気とは何か？

2.1 景気の定義

日常の挨拶で「景気はどう？」と尋ねることがある。大阪弁ではストレートに「もうかりまっか？」と尋ねるように、これは「商売が順調でもうかっているどうか」を尋ねている。この場合「景気」は「(自分が関わっている)商売の状況」を指す。

英語で「景気」に相当する単語は「ビジネス (business)」である。ビジネスといえば「仕事」という訳が思い浮かぶが、他に「商売」とか「景気」という意味もある。そもそもビジネスはビジー (busy) すなわち「忙しい」という形容詞の名詞形である。これが「忙しいこと」の意味で「仕事」「商売」となり、また「忙しさ」の意味で「景気」となる。したがって英語では「景気」は「忙しさ」を指す。

景気分析の対象は、個人ではなく国や地域全体の「景気」である。この場合「景気」は国や地域全体の「商売の状況」や「忙しさ」、すなわち「経済活動の水準」を指す。

2.2 景気的水準

2.2.1 実質 GDP

景気すなわち「経済活動の水準」の測り方は1つではない。たとえば「商売の状況」を測るにも売上高・販売量・利益など、また「忙しさ」を測るにも生産量・雇用者数・労働時間など様々な指標がある。経済学者やエコノミストが「景気を明確に定義するのは難しい」と言うことがあるが、これは定義そのものではなく測り方が難しいという意味であろう。

実質 GDP は、三面等価の原則 (総生産 = 総分配 = 総支出) に基づいて、国や地域全体の「経済活動の水準」をできるだけ包括的かつ正確に推計したものである。たとえば「経済成長率」が具体的には「実質 GDP の成長率」を指すように、実質 GDP で「経済活動の水準」を測るという考え方は広く浸透している。したがって景気を測る指標としては実質 GDP が最もふさわしい。

ただし実質 GDP は四半期系列であり、また2次統計のため公表が遅いという欠点がある。たとえば2006年1-3月期のGDPは1次速報値が5月19日、2次速報値が6月12日に公表された。このように実質GDPで測ることができるのは早くても2-4ヶ月前の景気である。またGDP速報値の推計精度は低く、ずっと遅れて公表される確報値や確々報値で大幅に改定されることも珍しくない。したがって「現在の景気」を測るには、速報性の高い月次の1次統計が役に立つ。

2.2.2 需給ギャップ

景気の「良し悪し」は実質 GDP の「水準」だけでは判断できない。需給ギャップ (GDP ギャップ) は「総需要 - 総供給能力」と定義され、正なら好況期、負なら不況期と判断する。ここで総需要は実質 GDP として観測されるが、総供給能力は潜在 GDP として推計する必要がある。しかし定義が曖昧なため潜在 GDP の推計方法は確立していない。^{*4} また GDP の速報性の問題も残る。

そこで需給ギャップを反映する月次の指標が注目される。生産における需給ギャップを表す「稼働率指数」、販売における需給ギャップを表す「在庫 (率) 指数」、労働市場の需給ギャップを表す「有効求人倍率」「所定外労働時間」などである。これらは部分的な需給ギャップを表す指標に過ぎないが、「現在の景気」の「良し悪し」を判断するためには GDP ギャップより役に立つ。

2.3 景気の局面

2.3.1 景気循環

「景気」を反映する経済指標を景気指標という。景気指標に共通して見られる規則的な循環変動を景気循環という。景気循環は拡張期と後退期の 2 つの局面に分けられる。拡張期から後退期に転ずる時点を景気の山、後退期から拡張期に転ずる時点を景気の谷といい、まとめて景気の転換点という。転換点の前後では景気の局面が大きく変化するので、生産・販売計画の策定の際に転換点の判断を誤ると大損害につながる。そのため景気分析においては転換点の判断が特に重視される。

景気循環の見方は 2 つある。景気指標の原系列 (たとえば実質 GDP) における循環を古典的循環、トレンドを除去した系列 (たとえば需給ギャップ) における循環を成長循環という。田原 (1998, pp. 19-20) が指摘するように、トレンド除去により転換点はシフトする。上方トレンドは拡張期を長く、後退期を短くする。逆に上方トレンドの除去は拡張期を短く、後退期を長くする。アメリカでは古典的循環に対して転換点 (景気基準日付) を定義している。日本では古典的循環だと高度成長期に転換点が検出されないので、実質的に成長循環に対して定義している。この点で日米の景気循環の見方は根本的に異なっており、それぞれに適切な景気指標を用いないと転換点の判断を誤る危険性がある。たとえばアメリカの景気指数と同じ構成指標を用いて日本の景気指数を作成するのは適切ではない。

拡張期・後退期と好況期・不況期は異なる分類方法である (前者をミッチェルの 2 局面、後者をシュンペーターの 2 局面という)。景気を 4 局面 (回復期・拡張期・後退期・収縮期) に分類すると、回復期はミッチェル方式では拡張期、シュンペーター方式では不況期に、また後退期はミッチェル方式では後退期、シュンペーター方式では好況期に含まれる。これを景気局面 (ミッチェル方式) と実感 (シュンペーター方式) のずれと感ずる場合もある。

2.3.2 転換点の決定

「転換点」という概念は必ずしも明確ではなく、その定義について 2 つの立場が対立している。Burns and Mitchell (1946) 以来の伝統的な立場では、「景気」の時系列から記述統計的に「山」「谷」を決める。具体的なアルゴリズムは Bry and Boschan (1971) が与えている。それに対して Hamilton (1989) 以来の新しい立場では、「高成長期」「低成長期」という 2 つの観測できない状態をもつスイッチング・モデルを仮定して、各時

^{*4} 最近の研究として鎌田・廣瀬 (2003) を挙げておく。

点での状態を推定する。

両者には一長一短がある。記述統計的に「山」「谷」を決める方法では、古典的循環と成長循環のどちらでみるか、すなわちトレンドを除去するかどうかにより「転換点」がシフトする。それに対して「高成長期」「低成長期」はトレンド除去に影響されない。しかし Harding and Pagan (2003) が指摘するように、スイッチング・モデルが誤った定式化なら状態は識別されない。それに対して記述統計的な「山」「谷」は常に決定できる。

「転換点」を単なる記述統計量とみるか、それとも実体として存在すると考えるかは分析の哲学の違いである。本稿では哲学の問題に深入りするのを避け、公的機関が決定する「転換点」を所与として受け入れる。その上で景気の「転換点」または「局面」の予測の問題を考える。

3 景気指数の役割

3.1 CI 型指数と DI 型指数

景気分析の主な関心は景気の「水準」と「転換点」の計測・予測にある。両者の推定値・予測値を本稿では景気指数と呼ぶ（本来は景気の計測を目的として景気指標を集計・指数化したものを指す）。

内閣府が作成する景気動向指数には 2 種類ある。CI（コンポジット・インデックス）は景気の「量感」を、DI（ディフュージョン・インデックス）は景気の「局面」を表すとされる。そこで本稿では景気の「水準」を計測・予測する指数を CI 型指数、「局面」または「転換点」を計測・予測する指数を DI 型指数と呼ぶことにする。すなわち CI 型指数は月次実質 GDP または需給ギャップの推定値・予測値であり、DI 型指数は景気の「局面」（その定義は別として）の推定値・予測値である。

3.2 先行・一致・遅行指数

「景気」との先行・遅行関係で景気指標は先行指標・一致指標・遅行指標に分類される。先行指標は将来の景気の「予測」に、一致指標は現在の景気の「計測」に、遅行指標は過去の景気の「確認」に利用される。

景気の「水準」と「局面」の予測値・速報値・確報値を本稿では先行指数・一致指数・遅行指数と呼ぶ（本来は先行・一致・遅行指標を集計・指数化したものを指す）。すなわち CI 型指数なら月次実質 GDP または需給ギャップ、DI 型指数なら景気の「局面」の 6 ヶ月先予測値・前月の速報値・確報値などである。

4 CI 型指数と月次実質 GDP

4.1 ストック = ワトソン指数

N 個の一致指標からストック = ワトソン指数を作成する。定常化のため必要に応じて指標を対数変換し、階差を取る（これは対前月比変化率と近似的に等しい）。この N 変量定常過程 $\{y_t\}$ に対して次のような 1 因子

モデルを仮定する .

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \lambda f_t + \mathbf{u}_t, \quad (1)$$

$$\phi_f(L)f_t = v_t, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_u(L)\mathbf{u}_t = \mathbf{w}_t, \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_t \\ \mathbf{w}_t \end{pmatrix} \right\} \sim \text{IN} \left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \sigma_{vv} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{ww} \end{bmatrix} \right), \quad (4)$$

ただし $\boldsymbol{\mu} := E(\mathbf{y}_t)$, λ は因子負荷ベクトル , f_t は共通因子 , \mathbf{u}_t は特殊因子ベクトル , L はラグ演算子 , $\phi_f(\cdot)$ は p 次多項式 , $\boldsymbol{\Phi}_u(\cdot)$ は q 次多項式行列を表す . 識別のため

1. $\lambda_1 = 1$,^{*5}
2. $\boldsymbol{\Phi}_u(\cdot)$ と $\boldsymbol{\Sigma}_{ww}$ は対角 ,

と仮定する . これらは因子分析の標準的な仮定である .

最尤推定のためモデルを状態空間表現する .^{*6} 状態ベクトルを

$$\mathbf{s}_t := \begin{pmatrix} f_t \\ \vdots \\ f_{t-p+1} \\ \mathbf{u}_t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{t-q+1} \end{pmatrix}$$

とすると ,^{*7} 状態空間モデルは

$$\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{s}_t + \mathbf{B}\mathbf{z}_t, \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{C}\mathbf{s}_t, \quad (6)$$

$$\{\mathbf{z}_t\} \sim \text{IN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{1+N}), \quad (7)$$

ただし

$$\mathbf{A} := \left[\begin{array}{ccc|ccc} \phi_{f,1} & \cdots & \phi_{f,p} & & & \\ & \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0} & & & \mathbf{O}_{p \times qN} \\ & & & \boldsymbol{\Phi}_{u,1} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{u,q} \\ \mathbf{O}_{qN \times p} & & & \mathbf{I}_{(q-1)N} & & \mathbf{O}_{(q-1)N \times N} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B} := \left[\begin{array}{c|c} \sigma_{vv}^{1/2} & \mathbf{O}_{p \times N} \\ \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{ww}^{1/2} \\ & \mathbf{O}_{(q-1)N \times N} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{C} := [\lambda \quad \mathbf{O}_{N \times (p-1)} \quad \mathbf{I}_N \quad \mathbf{O}_{N \times (q-1)N}].$$

^{*5} Stock and Watson (1989, 1991) は $\sigma_{vv} = 1$ としているが , 識別制約なので本質的に違いはない . $\lambda_1 = 1$ とするとストック = ワトソン指数と月次実質 GDP の関係が明らかになる (後述) .

^{*6} 状態空間表現は一意ではない . Stock and Watson (1991, p.69, 脚注 3) のように状態ベクトルの次元をもっと小さくすることもできる .

^{*7} Stock and Watson (1989, 1991) は f_t の累積和も状態変数に含めている . これは (f_t の更新推定値の累積和) \neq (f_t の累積和の更新推定値) となるためである . 平滑化推定値なら両者は等しい .

母数ベクトルを θ と置く．観測時系列 $\{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T$ の同時密度を予測誤差分解すると

$$p(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T; \theta) = p(\mathbf{y}_T | \mathbf{y}_{T-1}, \dots, \mathbf{y}_1; \theta) \cdots p(\mathbf{y}_1; \theta). \quad (8)$$

1 期先予測の条件つき密度は

$$p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_1; \theta) = (2\pi)^{-N/2} \det(\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}(\theta))^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(\theta))' \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}(\theta)^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(\theta))\right), \quad (9)$$

ただし

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(\theta) &:= E(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_1; \theta), \\ \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}(\theta) &:= \text{var}(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_1; \theta). \end{aligned}$$

したがって θ の対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \ell(\theta; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T) &= -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \det(\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}(\theta)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(\theta))' \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}(\theta)^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(\theta)). \end{aligned} \quad (10)$$

任意の t, s について

$$\begin{aligned} s_{t|s} &:= E(s_t | \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_1; \theta), \\ P_{t|s} &:= \text{var}(s_t | \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_1; \theta), \end{aligned}$$

とすると，状態空間モデルより

$$\boldsymbol{\mu}_{t|t-1}(\theta) = \boldsymbol{\mu} + C s_{t|t-1}, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}(\theta) = C P_{t|t-1} C'. \quad (12)$$

ここで $s_{1|0} := E(s_1)$ と $P_{1|0} := \text{var}(s_1)$ を θ から定めれば， $\{s_{t|t-1}, P_{t|t-1}\}_{t=2}^T$ はカルマン・フィルターで逐次的に評価できる．あとは対数尤度関数を数値的に最大化すればよい．

状態ベクトルの更新推定値 $s_{t|t}$ の第 1 成分は f_t の更新推定値であり，ストック＝ワトソン指数の変化率と解釈してよい．また平滑化推定値 $s_{t|T}$ を求めることもできる．ただし景気の転換点を捉えるためには f_t の平均・分散の調整が必要となる．

4.2 Mariano and Murasawa (2003, 2004) による拡張

N 個の一致指標のうち N_1 個が四半期系列，残りの N_2 個が月次系列とする．簡単化のため四半期系列は実質 GDP のみとする．定常化のため実質 GDP を対数変換し，階差を取る．これを \mathbf{y}_t の第 1 成分とする．

実質 GDP の四半期系列 $\{Y_{t,1}\}$ の背後には，観測されない月次系列 $\{Y_{t,1}^*\}$ が存在する．両者の間に以下の関係を仮定する．^{*8}

$$\ln Y_{t,1} = \frac{1}{3} (\ln Y_{t,1}^* + \ln Y_{t-1,1}^* + \ln Y_{t-2,1}^*). \quad (13)$$

^{*8} 本来は算術平均とするのが自然だが，線形・ガウス型状態空間モデルを維持するために幾何平均とする．イギリスの月次 GDP を推定した Mitchell et al. (2005, pp. F115–F116) でも 1 次近似としてこの仮定を採用している．ただし非線形・非ガウス型状態空間モデルの最尤推定やベイズ推定も最近では可能になっている．

四半期階差をとると，

$$\ln Y_{t,1} - \ln Y_{t-3,1} = \frac{1}{3} (\ln Y_{t,1}^* - \ln Y_{t-3,1}^*) + \frac{1}{3} (\ln Y_{t-1,1}^* - \ln Y_{t-4,1}^*) + \frac{1}{3} (\ln Y_{t-2,1}^* - \ln Y_{t-5,1}^*),$$

すなわち

$$\begin{aligned} y_{t,1} &= \frac{1}{3} (y_{t,1}^* + y_{t-1,1}^* + y_{t-2,1}^*) + \frac{1}{3} (y_{t-1,1}^* + y_{t-2,1}^* + y_{t-3,1}^*) + \frac{1}{3} (y_{t-2,1}^* + y_{t-3,1}^* + y_{t-4,1}^*) \\ &= \frac{1}{3} y_{t,1}^* + \frac{2}{3} y_{t-1,1}^* + y_{t-2,1}^* + \frac{2}{3} y_{t-3,1}^* + \frac{1}{3} y_{t-4,1}^*, \end{aligned} \quad (14)$$

ただし $y_{t,1}^* := \Delta \ln Y_{t,1}^*$.

y_t の第 1 成分を $y_{t,1}^*$ に置き換えたものを y_t^* とし，これに対して 1 因子モデルを仮定する .

$$\mathbf{y}_t^* = \boldsymbol{\mu}^* + \lambda f_t + \mathbf{u}_t, \quad (15)$$

$$\phi_f(L) f_t = v_t, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_u(L) \mathbf{u}_t = \mathbf{w}_t, \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_t \\ \mathbf{w}_t \end{pmatrix} \right\} \sim \text{IN} \left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \sigma_{vv} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{ww} \end{bmatrix} \right), \quad (18)$$

ただし $\boldsymbol{\mu}^* := E(\mathbf{y}_t^*)$. $p, q \leq 5$ なら状態ベクトルを次のように定義する .

$$\mathbf{s}_t := \begin{pmatrix} f_t \\ \vdots \\ f_{t-4} \\ \mathbf{u}_t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{t-4} \end{pmatrix}.$$

状態空間モデルは

$$\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{s}_t + \mathbf{B} \mathbf{z}_t, \quad (19)$$

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{C} \mathbf{s}_t, \quad (20)$$

$$\{\mathbf{z}_t\} \sim \text{IN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{1+N}), \quad (21)$$

ただし

$$\mathbf{A} := \left[\begin{array}{cccc|cccc} \phi_{f,1} & \cdots & \phi_{f,p} & \mathbf{0}' & & & & \\ & & \mathbf{I}_4 & \mathbf{0} & & & \mathbf{O}_{5 \times 5N} & \\ & & & & \boldsymbol{\Phi}_{u,1} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{u,q} & \mathbf{O}_{N \times (5-q)N} \\ & & \mathbf{O}_{5N \times 5} & & & & \mathbf{I}_{4N} & \mathbf{O}_{4N \times N} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B} := \left[\begin{array}{c|c} \sigma_{vv}^{1/2} & \mathbf{O}_{5 \times N} \\ \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{ww}^{1/2} \\ & \mathbf{O}_{4N \times N} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{C} := \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|cc|cc|cc} 1/3 & 2/3 & 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & \mathbf{0}' & 2/3 & \mathbf{0}' & 1 & \mathbf{0}' & 2/3 & \mathbf{0}' & 1/3 & \mathbf{0}' \\ & & & & & \lambda_2 & & & & & & & & & \end{array} \right].$$

ここで y_t の第 1 成分は 3 ヶ月に 1 度しか観測されないが，欠損値を含む時系列を用いた線形・ガウス型状態空間モデルの最尤推定は，適切なソフトウェアを利用すれば容易である（後述）. 状態ベクトルの更新・平滑化推定値は通常のアプローチで求まる .

表 1 景気動向指数の一致系列

系列名	備考
生産指数（鉱工業）	
鉱工業生産財出荷指数	
大口電力使用量	
稼働率指数（製造業）	需給ギャップ
所定外労働時間指数（製造業）	需給ギャップ
投資財出荷指数（除輸送機械）	
商業販売額（小売業）	前年同月比
商業販売額（卸売業）	前年同月比
営業利益（全産業）	四半期系列
中小企業売上高（製造業）	
有効求人倍率（除学卒）	需給ギャップ

識別制約より $y_{t,1}^* = f_t + u_{t,1}$ なので、 f_t は月次実質 GDP に含まれる共通因子部分となっている。したがって従来のストック=ワトソン指数と異なり、景気の転換点を捉えるための事後的な調整は不要である。

また $f_t, u_{t,1}$ が推定できるので $y_{t,1}^*$ も推定できる。そこで共通因子ではなく月次実質 GDP の推定を目的とすると、もはや 1 因子モデルに限定する必要はなく、多因子モデル・VAR モデルなど何でも使用できる。1 因子モデルが適切かどうかは何らかのモデル選択基準で判断すればよい。

4.3 構成指標の選択

月次実質 GDP の推定を目的すると、構成指標の選択はモデル（変数）選択の問題になる。したがって月次実質 GDP の予測力を尤度・情報量基準などで比較すればよい。予測力のみが問題なので一致指標に限定する必要はない。なお因子モデル・VAR モデルなどの連立方程式モデルでは、月次実質 GDP の予測式のみに関する周辺尤度の評価が必要となる。

構成指標の選択の原理は単純であるが、考えるすべてのモデル・構成指標の比較は計算量が膨大になり不可能である。したがって候補となるモデル・構成指標をあらかじめ限定しておく必要がある。

4.4 日本の景気指標への応用

アメリカの月次実質 GDP を推定した Mariano and Murasawa (2004) にならい、実質 GDP（四半期、季調済み）と景気動向指数の一致系列（表 1）から VAR モデルと因子モデルを用いて日本の月次実質 GDP を推定する。古典的循環の指標と成長循環の指標（需給ギャップ）が混在しているのは転換点の決定が目的なら問題であるが、月次実質 GDP の推定が目的なら問題ない。すでに前年同月比となっている 2 系列を除き、定常化のため対数変換し階差をとって 100 倍する。標本期間は 1980 年 4 月～2004 年 12 月の 297 ヶ月とする。データは内閣府のホームページからダウンロードできる。

12 変数の VAR モデルや因子モデルだと未知母数が非常に多くなり、(対数)尤度関数の最大化が困難になる（欠損値のため VAR モデルも OLS で推定できない）。そのため日本版ストック=ワトソン指数を作成した

Fukuda and Onodera (2001) では、やや恣意的に 5 変数を選択している。しかしコンピューターの計算能力の向上・数値計算ソフトウェアの改善・アルゴリズムの工夫等により、ある程度まで数値計算上の困難は克服できる。また客観的な変数選択のためには、すべての変数を含むモデルも推定してみる必要がある。そこで本稿では恣意的な変数選択を避け、12 変数のモデルの推定を試みる。

未知母数を減らすため、すべての変数を中心化し、モデルから定数項を除去する。また反復計算の収束を速めるため、実質 GDP を除いて分散を 1 に基準化する。VAR モデルでは EM アルゴリズムによる最尤推定値を初期値として準ニュートン法 (BFGS) で最終的な推定値を求める。^{*9} 時系列因子モデルでは EM アルゴリズムが適用できないので、^{*10} 適当に初期値を選ぶ。計算には Doornik (2001) が開発した行列計算言語 Ox 3.4 を用いる。尤度関数の評価には Koopman et al. (1999) が開発した SSfPack 2.2 を Ox 上で利用するのが便利である。このパッケージは欠損値も自動的に処理してくれる。

12 変数の VAR(p) モデルは $144p + 78$ 個の母数をもつ。 $p = 1$ なら計算時間は 1 日程度だが、 $p > 1$ だと数週間以上かかるので実用的でない。共通因子ベクトルが VAR(p)、各特殊因子が独立に AR(q) に従う 12 変数の K 因子モデルは $(12 - K)K + pK^2 + K(K + 1)/2 + 12(q + 1)$ 個の母数をもつ。 $K = 1$ なら $p, q \leq 5$ の範囲ですべて収束したが、 $K > 1$ だと収束しない場合もあった。そこで VAR(1) モデルと 1 因子モデルを候補とし、赤池の情報量基準 (AIC) とシュワルツのベイジアン情報量基準 (SBIC) で比較したところ、どちらも VAR(1) モデルを選択した。

VAR(1) モデルによる月次実質 GDP の平滑化推定値を実質 GDP (四半期、季調済み) および CI (一致指数) と比較したのが図 1 である。確かに四半期系列を月次に配分した系列が得られている。ただし実質 GDP は CI ほど景気の転換点を捉えていない。これは実質 GDP が古典的循環の指標であるのに対し、日本では転換点を成長循環で定義しているためである。転換点を捉えるには GDP ギャップの推定が必要であろう。本稿では「転換点」の定義に立ち入らないので、この問題は別の機会に検討したい。^{*11}

5 DI 型指数と景気拡張 (後退) 確率

5.1 景気拡張 (後退) 確率

景気動向指数の DI は次式で定義される。

$$DI := \frac{\text{3ヶ月前より改善した指標の数 (横ばいは 0.5 と数える)}}{\text{構成指標の数}}$$

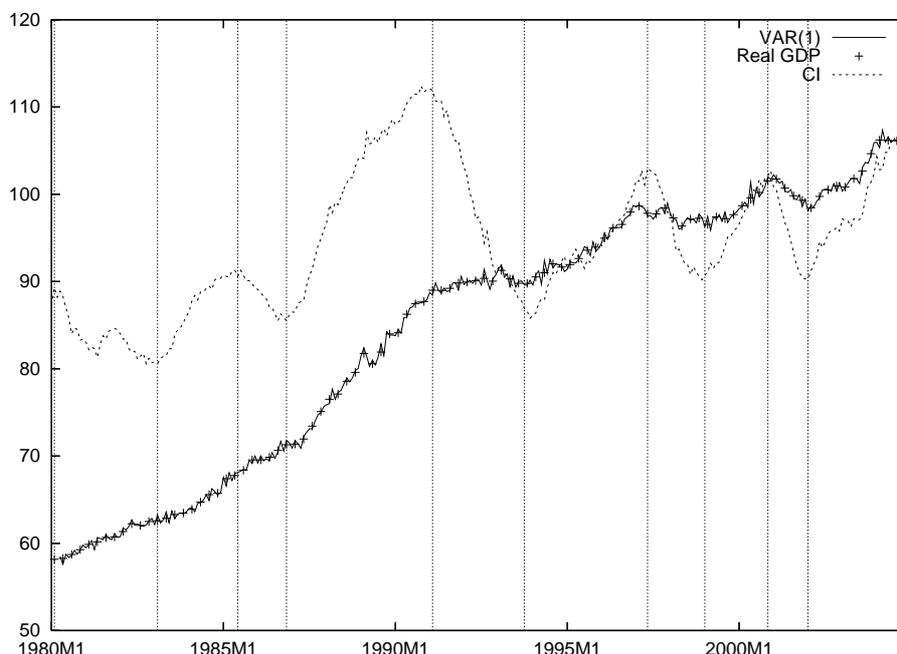
DI は 0 ~ 100 % の値をとるが、記述統計的な意味しかもたない。「景気拡張 (後退) 確率」は景気の局面を確率的に表す DI 型指数であり、天気予報の降水確率のように解釈できる。「景気拡張 (後退) 確率」の推定には 2 項応答モデルとマルコフ型スイッチング・モデルがよく用いられる。前者は局面の「予測」に、後者は局面の「確認」に適している。

^{*9} EM アルゴリズムの詳細は Mariano and Murasawa (2004) を参照。

^{*10} 状態空間モデルの観測方程式に未知母数があり誤差項がない場合、それらの未知母数は complete data の尤度関数から欠落してしまうため。

^{*11} 採用系列に古典的循環と成長循環の指標が混在している CI が転換点を捉えるのは、それらの系列で転換点を決めてきたからに過ぎない。この決め方の是非は「転換点」の定義に関わっている。

図1 実質 GDP (月次・四半期) と CI (一致指数)



注：2000年 = 100．季調済み．縦線は景気基準日付．

出所：筆者による推計，内閣府．

5.2 2項応答モデル

ダミー変数 d_t で拡張期 ($d_t = 1$)・後退期 ($d_t = 0$) を表す．景気の局面が確定すれば d_t は観測される．説明変数ベクトルを x_t として，2項応答モデルを考える．

$$\Pr[d_t = 1 | x_t] = r(x_t). \quad (22)$$

$r(\cdot)$ の定式化としてはロジット・モデルやプロビット・モデルが一般的であるが，他にもニューラル・ネットワークなど様々な定式化が可能である．

例として日本の景気拡張確率を2項ロジット・モデルで推定する．^{*12} 比較のため DI (一致指数) の採用系列を説明変数の候補とする (表1)．ただし簡単化のため月次系列のみとする．DI の作成方法にならい，すでに前年同月比となっている2系列は3ヶ月階差，その他の系列は対数変換し3ヶ月階差をとって100倍する．標本期間は1980年4月～2002年1月の262ヶ月とする．

構成指標の選択には通常モデル選択基準を用いる．10変数から選択するなら $2^{10} = 1,024$ 通りのモデルを推定する．AIC では以下の6変数，SBIC では下線の3変数のモデルが選択された．

1. 生産指数 (鉱工業)，
2. 鉱工業生産財出荷指数，

*12 AIC・SBIC とともにプロビット・モデルよりロジット・モデルを選択した．

表 2 2 項ロジット・モデルの推定結果

説明変数	係数	漸近 t 値	限界効果
定数項	.34	1.28	
生産指数（鉱工業）	-1.28	-3.32	-.31
鉱工業生産財出荷指数	.87	3.08	.21
大口電力使用量	.84	3.42	.20
所定外労働時間指数（製造業）	.50	4.40	.12
投資財出荷指数（除輸送機械）	.34	2.16	.08
有効求人倍率（除学卒）	.34	4.05	.08

3. 大口電力使用量，
4. 所定外労働時間指数（製造業），
5. 投資財出荷指数（除輸送機械），
6. 有効求人倍率（除学卒）。

残りの 4 変数は余分ということになる。定式化や標本期間は異なるが、美添他 (2003, p. 51) も類似の結果を得ている。

表 2 は 6 変数の 2 項ロジット・モデルの推定結果である。最も代表的な一致指標である鉱工業生産指数の係数が逆符号となっている。美添他 (2003, p. 51) も 2 項ロジット・モデルの変数選択で鉱工業生産指数が選択されにくいと指摘している。そもそも生産指数は古典的循環の指標であり、また日本の GDP に占める鉱工業の割合は約 3 割と低い。鉱工業生産指数と景気の関係は再考を要する。

図 2 は 6 変数の 2 項ロジット・モデルで推定した景気拡張確率と DI（一致指数）の比較である。景気拡張確率は拡張期に 1、後退期に 0 という明確な値を DI より取りやすい。拡張確率が 0.5 以上なら拡張、0.5 未満なら後退と判定すると、262 ヶ月中 241 回の的中で、的中率は約 92 % である。ただしこれはあくまでも内挿テストの結果である。

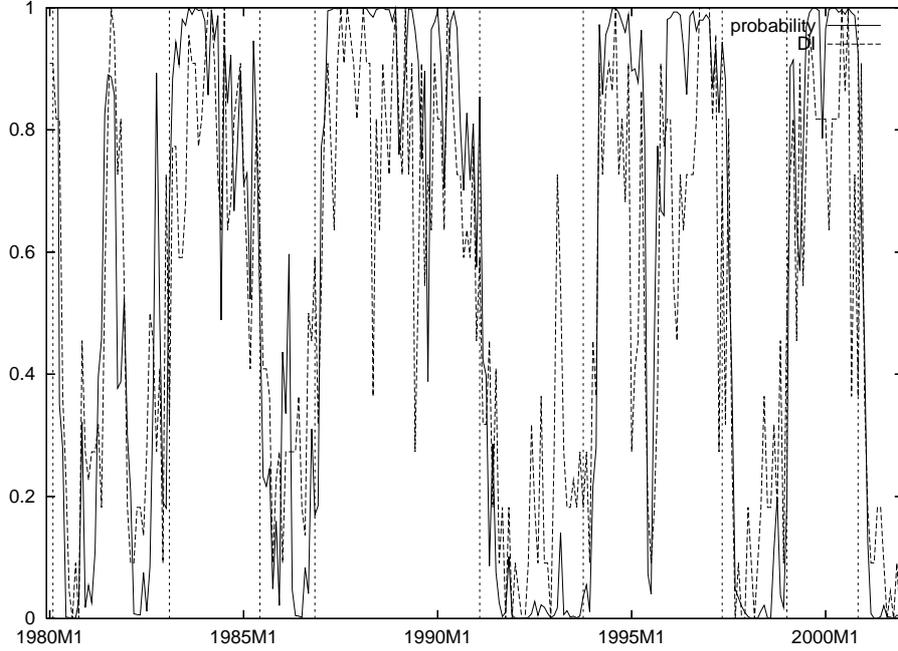
上記の 2 項ロジット・モデルによる景気局面の予測結果は良好であるが、まだ改善の余地がある。たとえば指標により異なる階差をとることもできる。Birchenhall et al. (1999, pp. 319–320) は、アメリカの景気拡張確率を 2 項ロジット・モデルで推定する際に、鉱工業生産指数の 1 ヶ月階差・雇用者数の 3 ヶ月階差・個人所得の 6 ヶ月階差の 3 変数を SBIC で選択している。ただし 10 変数の 1・3・6 ヶ月階差だと 30 変数となり、 $2^{30} = 1,073,741,824$ 通りのモデルの比較が必要となる。またラグつき変数や先行・遅行指標を説明変数の候補に加えることもできる。これほど膨大な数のモデルから選択する場合は、遺伝的アルゴリズム等を利用した効率的なモデル探索が必要である。

5.3 マルコフ型スイッチング・モデル

景気を表す定常時系列（たとえば実質 GDP の変化率）を $\{y_t\}$ とする。観測されないダミー変数 s_t で高成長期 ($s_t = 1$)・低成長期 ($s_t = 0$) を表す。最も単純なスイッチング・モデルは

$$y_t | s_t \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma^2) & \text{if } s_t = 1 \\ N(\mu_0, \sigma^2) & \text{if } s_t = 0 \end{cases} \quad (23)$$

図2 2項ロジット・モデルによる景気拡張確率とDI(一致指数)



注：縦線は景気基準日付．

出所：筆者による推計，内閣府．

ただし $\mu_1 > \mu_0$. $\{s_t\}$ がマルコフ連鎖ならマルコフ型スイッチング・モデルという．

スイッチング・モデルには様々な定式化がある．平均がスイッチする AR モデルは

$$\phi(L)[y_t - s_t\mu_1 - (1 - s_t)\mu_0] = w_t, \quad (24)$$

$$\{w_t\} \sim \text{IN}(0, \sigma^2). \quad (25)$$

また分散や AR 係数がスイッチしてもよいし，状態の数が3つ以上でもよい．さらにマルコフ連鎖の推移確率を内生化したり，VAR モデル・因子モデルなど多変量モデルに拡張することもできる．

マルコフ型スイッチング・モデルは s_t を状態変数とする非ガウス型状態空間モデルで表現できる．母数の最尤推定は線形・ガウス型の場合と同様である．平均がスイッチする AR(p) モデルなら， $\mathbf{y}_t := (y_1, \dots, y_t)$ として \mathbf{y}_T の同時密度を次のように分解する．

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_T) &= \sum_{t=1}^T p(y_t | \mathbf{y}_{t-1}) \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{s_t=0}^1 \cdots \sum_{s_{t-p}=0}^1 p(y_t, s_t, \dots, s_{t-p} | \mathbf{y}_{t-1}) \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{s_t=0}^1 \cdots \sum_{s_{t-p}=0}^1 p(y_t | s_t, \dots, s_{t-p}, \mathbf{y}_{t-1}) p(s_t, \dots, s_{t-p} | \mathbf{y}_{t-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $\{p(s_t, \dots, s_{t-p} | \mathbf{y}_{t-1})\}_{t=1}^T$ はカルマン・フィルターと類似のアルゴリズムで逐次的に評価できる．またマルコフ型スイッチング・モデルでは EM アルゴリズムも非常に便利である．Hamilton (1990) を参照．

表3 マルコフ型スイッチング・モデルの推定結果

	AR(0)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
μ_1	1.02	.97	.98	.92	.92
μ_0	.37	.36	.36	-.40	-.49
ϕ_1		.03	.03	-.06	.05
ϕ_2			.01	.23	.29
ϕ_3				.52	.52
ϕ_4					-.23
σ	.79	.80	.80	.56	.53
AIC	2.55	2.57	2.60	2.54	2.55
SBIC	2.68	2.73	2.78	2.75	2.79

景気拡張（後退）確率の平滑化推定値 $p(s_t|y_T)$ も逐次的なアルゴリズムで求まる。2項応答モデルと異なり過去の局面の情報を必要としないので、公的機関が決定した転換点と独立に局面（景気拡張確率）を推定できる。ただしモデルの定式化が誤っていれば状態は正しく識別されない。また公的機関が決定する転換点の予測が目的なら、その情報を推定に用いる2項応答モデルの方が優れている。

例として日本の実質 GDP（四半期，季調済み）のマルコフ型スイッチング・モデル（平均がスイッチする AR モデル）を推定する。定常化のため原系列を対数変換し階差をとって 100 倍する。標本期間は 1980 年第 2 四半期～2005 年第 1 四半期の 100 四半期とする（推定期間はモデルの AR 次数により異なる）。マルコフ型スイッチングモデルの最尤推定には Krolzig (1997) が開発した MS-VAR 1.31k を Ox 上で利用するのが便利である。このパッケージでは EM アルゴリズムのみを用いている。

推定結果は表 3 の通りである。AR(0)・AR(1)・AR(2) の結果は似ているが、AR(3) になると μ_0 の推定値が大幅に低下する。AIC は AR(3)、SBIC は AR(0) を選択した。図 3 は AR(0) と AR(3) で推定した景気拡張確率の比較である。AR(0) では 80 年代の高成長期と 90 年代の低成長期に二分されるのに対し、AR(3) では短い低成長期が周期的に現れているが、いずれも景気基準日付と一致しているとは言い難い。なお AR(1)・AR(2) は AR(0) と、AR(4) は AR(3) と同様の結果になる。

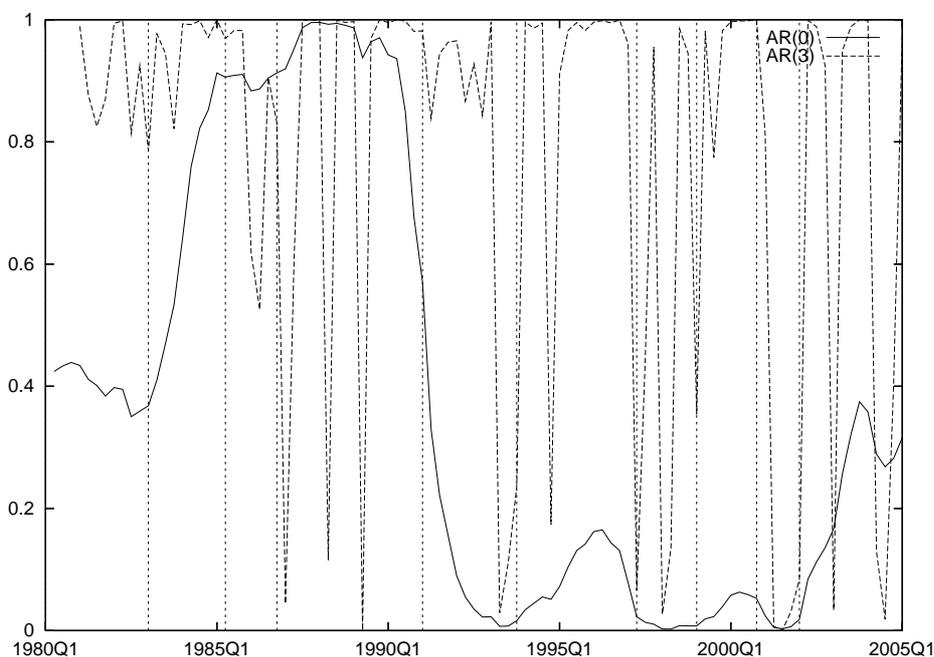
以上の結果は次のように解釈できる。仮に AR(3) が正しい定式化なら AR(0) は誤った定式化となり、最尤推定量は一致性をもたない可能性が高い。そして μ_1, μ_0 の推定値にバイアスが生じれば、景気後退確率の推定値にもバイアスが生じる。もちろん AR(4) が正しい定式化なら AR(3) も誤った定式化になる。したがって正しい定式化を知らない限り、マルコフ型スイッチング・モデルによる景気拡張確率の信頼性は低い。

6 まとめと今後の課題

本稿では CI 型・DI 型景気指数の統計的基礎を明らかにした。CI やストック＝ワトソン指数は景気の「量感」を表すとされる。しかし経済変数として意味をもたない指数の水準は解釈できない。景気を「実質 GDP」で測るなら、CI 型指数は「月次実質 GDP」の推定値とすべきである。そのような指数はストック＝ワトソン指数の自然な拡張としても導かれる。

日本の月次 GDP の推計値は日本経済研究センターとニッセイ基礎研究所が公表している。それらは需要項

図3 マルコフ型スイッチング・モデルによる景気拡張確率



注：縦線は景気基準日付．

目別や需要・供給両面の推計値を結合する形で多くの情報を取り込んでおり（詳細は山澤（2003）を参照），おそらく本稿の推定値より精度が高い．ただし本稿の手法は各需要項目の推定に応用できる．

DIは景気の「局面」を表すとされるが，その値は確率として解釈できない．DI型指数は「景気拡張（後退）確率」の推定値とすべきである．本稿では2つの推定手法を比較・検討した．2項応答モデルによる推定では公的機関が決定した過去の「局面」の情報を利用する．特にロジット・モデルやプロビット・モデルなら推定は非常に簡単である．ただし説明変数の候補が無数にあるので，最適な選択には数値計算上の工夫が必要である．マルコフ型スイッチング・モデルによる推定では過去の「局面」の情報を利用しない．定式化が正しければ公的機関の判断と独立に景気局面を推定できるが，定式化が誤っていれば結果の信頼性は低い．

日本の景気拡張（後退）確率の推計値は大和総合研究所とニッセイ基礎研究所が公表している．前者は本稿で検討しなかった Neftçi (1982) の手法に基づく^{*13} 後者はニッセイ先行 CI にプロビット・モデルを適用しているが，モデル・変数選択に改善の余地がある．

残された最重要課題は「転換点」の定義である．記述統計的に「山」「谷」を決める方法ではトレンド除去により転換点がシフトしてしまう．トレンドを除去するなら恣意的でない方法（GDPギャップなど）が必要である．「高成長期」「低成長期」の分類はトレンド除去に影響されないが，マルコフ型スイッチング・モデルによる推定には定式化の問題がある．記述統計的に「高成長期」「低成長期」を分類するのも1つの方法である．「転換点」という概念の必要性も含め，別の機会に改めて検討したい．

*13 スwitching・モデルを仮定するが，マルコフ型ではなく直近の転換点から出発してスイッチングが起こった確率を逐次的に求める．そのため局面ごとに作られる指数となる．

参考文献

- Birchenhall, Chris R., Hans Jessen, Denise R. Osborn, and Paul Simpson (1999) "Predicting U.S. Business-Cycle Regimes," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 17, pp. 313–323.
- Bry, Gerhard and Charlotte Boschan (1971) "Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Programs," Technical Paper 20, National Bureau of Economic Research.
- Burns, Arthur F. and Wesley C. Mitchell (1946) *Measuring Business Cycles*: National Bureau of Economic Research.
- Doornik, Jurgen A. (2001) *Ox: An Object-Oriented Matrix Language*: Timberlake Consultants, 4th edition.
- Fukuda, Shin-ichi and Takashi Onodera (2001) "A New Composite Index of Coincident Economic Indicators in Japan: How Can We Improve Forecast Performance?" *International Journal of Forecasting*, Vol. 17, pp. 483–498.
- Hamilton, James D. (1989) "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, Vol. 57, pp. 357–384.
- (1990) "Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime," *Journal of Econometrics*, Vol. 45, pp. 39–70.
- Harding, Don and Adrian Pagan (2003) "A Comparison of Two Business Cycle Dating Methods," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 27, pp. 1681–1690.
- Koopman, Siem Jan, Neil Shephard, and Jurgen A. Doornik (1999) "Statistical Algorithms for Models in State Space Using SsfPack 2.2," *Econometrics Journal*, Vol. 2, pp. 107–160.
- Krolzig, Hans-Martin (1997) *Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis*: Springer-Verlag.
- Mariano, Roberto S. and Yasutomo Murasawa (2003) "A New Coincident Index of Business Cycles Based on Monthly and Quarterly Series," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 18, pp. 427–443.
- (2004) "Constructing a Coincident Index of Business Cycles Without Assuming a One-Factor Model," Discussion Paper 2004-6, College of Economics, Osaka Prefecture University.
- Mitchell, James, Richard J. Smith, Martin R. Weale, Stephen Wright, and Eduardo L. Salazar (2005) "An Indicator of Monthly GDP and an Early Estimate of Quarterly GDP Growth," *Economic Journal*, Vol. 115, pp. F108–F129.
- Neftçi, Salih N. (1982) "Optimal Prediction of Cyclical Downturns," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 4, pp. 225–241.
- Stock, James H. and Mark W. Watson (1989) "New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators," *NBER Macroeconomics Annual*, Vol. 4, pp. 351–409.
- (1991) "A Probability Model of the Coincident Economic Indicators," in Kajal Lahiri and Geoffrey H. Moore eds. *Leading Economic Indicators*: Cambridge University Press, pp. 63–89.
- 鎌田康一郎・廣瀬康生 (2003) 「潜在 GDP とフィリップス曲線を同時推計する新手法」, 『金融研究』, 13–34 頁, 6 月 .
- 田原昭四 (1998) 『日本と世界の景気循環』, 東洋経済新報社 .

山澤成康 (2003) 「景気指標としての月次 GDP」, 浅子和美・福田慎一 (編) 『景気循環と景気予測』, 東京大学出版会, 第 8 章, 201-231 頁.

美添泰人・大平純彦・塩路悦朗・勝浦正樹・元山斉・大西俊郎・沢田章・児玉泰明 (2003) 「景気指標の新しい動向」, 『経済分析』166 号, 内閣府経済社会総合研究所.