

中級統計学：後期定期試験

村澤 康友

2020年1月28日

注意：3問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は0点とする）。教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）。

1. (20点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各20字程度）。

(a) 検定 (b) 有意水準 (c) p値 (d) 回帰

2. (30点) $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本分散を s^2 とする。次の両側検定問題を考える。

$$H_0: \sigma^2 = 1 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma^2 \neq 1$$

有意水準を5%とする。

(a) 検定統計量を与えなさい。

(b) 検定統計量の H_0 の下での分布を求め、 $n = 10$ として検定の棄却域を定めなさい。

(c) $s^2 = 2$ として検定統計量の値を求め、検定の結果を述べなさい。

3. (50点) ゴルトンは身長遺伝を研究した。両親の平均身長と成人した子供の身長（女性の身長は1.08倍して男性に換算）の無作為標本を $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ とする（単位はインチ）。 y_i の x_i 上への単回帰モデルは

$$E(y_i | x_i) = \alpha + \beta x_i$$

$\beta < 1$ となる現象を「平均への回帰」という。回帰分析の結果は以下の通りであった。

モデル 1: 最小二乗法 (OLS), 観測: 1-928

従属変数: child

	係数	標準誤差
const	23.9415	2.81088
parent	0.646291	0.0411359

β の OLS 推定量を b , その標準誤差を s とする。また $b \stackrel{a}{\sim} N(\beta, s^2)$ とみなしてよい。

(a) β の 95% 信頼区間を求めなさい。

(b) β の t 値を求めなさい。

(c) 「平均への回帰」の有無の検定問題を定式化しなさい。

(d) 「平均への回帰」の有無の検定統計量の値を求めなさい。

(e) 有意水準 5% の検定の棄却域を定め、「平均への回帰」の有無の検定を実行しなさい。

解答例

1. 統計学の基本用語

- (a) 統計的仮説の真偽を標本から判定すること.
 - 「仮説」がなければ 0 点.
- (b) 許容する第 1 種の誤りの確率.
- (c) H_0 の下で検定統計量が実現値以上になる確率 (右側確率).
- (d) $E(Y|X)$ を求めること.

2. 母分散の検定

- (a) s^2 の標本分布は

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

したがって検定統計量は

$$\chi^2 := (n-1)s^2$$

- s^2 の標本分布で 2 点.
 - $(n-1)s^2/c$ は 5 点.
- (b) H_0 の下で

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$n = 10$ なら $\chi^2 \sim \chi^2(9)$ なので, χ^2 分布表より

$$\Pr[\chi^2 \leq 2.70039] = .025$$

$$\Pr[\chi^2 \geq 19.0228] = .025$$

したがって棄却域は $[0, 2.70039] \cup [19.0228, \infty)$.

- $\chi^2(n-1)$ で 5 点.
- (c) $s^2 = 2$ なら検定統計量の値は $(n-1)s^2 = 18$. これは棄却域に入らないので H_0 は採択.
 - 検定統計量の値で 5 点.

3. 回帰分析

- (a) $b \stackrel{a}{\sim} N(\beta, s^2)$ より

$$\frac{b - \beta}{s} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

したがって

$$\Pr\left[-1.96 \leq \frac{b - \beta}{s} \leq 1.96\right] \approx .95$$

または

$$\Pr[-1.96s \leq b - \beta \leq 1.96s] \approx .95$$

または

$$\Pr[b - 1.96s \leq \beta \leq b + 1.96s] \approx .95$$

$b = .646291$, $s = .0411359$ より β の 95 % 信頼区間は $[.566, .727]$.

- $N(0, 1)$ の 95 % 区間で 2 点.
- $[b - 1.96s, b + 1.96s]$ で 5 点.

(b)

$$\begin{aligned} t &= \frac{b}{s} \\ &= \frac{.646291}{.0411359} \\ &\approx 15.71 \end{aligned}$$

(c)

$$H_0 : \beta = 1 \ (\alpha, \sigma^2 \text{ は任意}) \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta < 1 \ (\alpha, \sigma^2 \text{ は任意})$$

- H_0, H_1 各 5 点.

(d) 検定統計量は

$$\begin{aligned} Z &:= \frac{b-1}{s} \\ &= \frac{.646291 - 1}{.0411359} \\ &\approx -8.60 \end{aligned}$$

(e) 棄却域は $(-\infty, -1.645]$. 検定統計量が棄却域に入るので, H_0 を棄却して H_1 を採択. すなわち「平均への回帰」は存在する.

- 棄却域で 5 点.