中級統計学：定期試験

村澤 康友

2023 年 1 月 24 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）．

1. （20 点）以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   (a) とりあえず真と想定する仮説
   (b) OLS 問題の 1 階の条件を整理した式
   (c) 推定量の標準偏差の推定値
   (d) ある条件に該当するなら 1，該当しないなら 0 とした変数
2. （30 点）教育の収益率（修学年数が 1 年増えることによる年収の増加率）を推定したい．そこで無作為標本を用いて年収（対数値）を修学年数で説明する単回帰分析を行い，次の結果を得た．

$$\widehat{\text{lincome}} = \underset{(0.10031)}{4.38520} + \underset{(0.0071735)}{0.0651801}\,\text{yeduc}$$

$$T = 4327 \quad \bar{R}^2 = 0.0185 \quad F(1, 4325) = 82.559 \quad \hat{\sigma} = 0.88683$$

(丸括弧内は標準誤差)

   (a) 教育の収益率の OLS 推定値を単位も含めて正確に答えなさい．
   (b) 教育の収益率の t 値を求めなさい．
   (c) 教育の収益率の 95 %信頼区間を求めなさい（漸近分布で近似してよい）．
3. （50 点）$\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}$，標本分散を s^2 とする．次の両側検定問題を考える．

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq 0$$

   有意水準を 5 %とする．
   (a) $\bar{X}$ の分布を求めなさい．
   (b) t 検定統計量を与えなさい．
   (c) $n = 20$ として t 検定の棄却域を定めなさい．
   (d) F 検定統計量 $F := n\bar{X}/s^2$ を用いてもよい．F は H_0 の下でどのような分布をもつか？
   (e) $n = 20$ として F 検定の棄却域を定めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 帰無仮説
   (b) 正規方程式
   (c) 標準誤差
   (d) ダミー変数
2. 単回帰分析
   (a) 6.51801%.
      - 0.0651801 は 5 点.
   (b) $t = 0.0651801/0.00717354 \approx 9.086$.
   (c) 教育の収益率を β，β の OLS 推定量を b，b の標準誤差を s とすると
   $$\frac{b-\beta}{s} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$
   したがって
   $$\Pr\left[-1.96 \leq \frac{b-\beta}{s} \leq 1.96\right] \approx .95$$
   または
   $$\Pr[-1.96s \leq b-\beta \leq 1.96s] \approx .95$$
   または
   $$\Pr[b-1.96s \leq \beta \leq b+1.96s] \approx .95$$
   $b = 0.0651801$，$s = 0.00717354$ より β の 95 %信頼区間は $[0.0511162, 0.0792439]$，すなわち $[5.1\%, 7.9\%]$.
3. 母平均の検定
   (a)
   $$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$
      - 分散を s^2/n としたら 0 点.
   (b) t 検定統計量は
   $$t := \frac{\bar{X}}{\sqrt{s^2/n}}$$
      - $\left(\bar{X}-c\right)/\sqrt{s^2/n}$ は 5 点. $\left(\bar{X}-\mu\right)/\sqrt{s^2/n}$ や $\bar{X}/\sqrt{\sigma^2/n}$ は統計量でないので 0 点.
   (c) H_0 の下で $t \sim \mathrm{t}(19)$ なので，t 分布表より
   $$\Pr[|t| \geq 2.093] = .05$$
   したがって棄却域は $(-\infty, -2.093] \cup [2.093, \infty)$.
      - t(19) で 2 点.
   (d) H_0 の下で $F = t^2 \sim \mathrm{F}(1, 19)$.
   (e) F 分布表より
   $$\Pr[F \geq 4.381] = .05$$
   したがって棄却域は $[4.381, \infty)$.