

第5回 条件付き確率と事象の独立性 (4.5)

村澤 康友

2023年10月9日

今日のポイント

1. B が起こったという条件の下での A の条件付き確率は $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$.
2. $P(A|B) = P(A)$ なら A と B は独立という. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ で定義してもよい.
3. 条件付き確率の定義からベイズの定理が導ける.

目次

1	条件付き確率 (p. 81)	1
2	事象の独立性 (p. 83)	1
2.1	2つの事象	1
2.2	3つ以上の事象	2
3	ベイズの定理 (p. 84)	2
4	今日のキーワード	4
5	次回までの準備	4

1 条件付き確率 (p. 81)

ある試行の事象を A, B とする.

定義 1. B が起こったという条件の下での A の条件付き確率は

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ただし $P(B) > 0$.

注 1. B を標本空間としたときの $A \cap B$ の確率.

例 1. つぼの中に A または B と書かれた 2 色の玉が以下のように入っている.

種類	個数
A の白玉	2
A の黒玉	1
B の白玉	1
B の黒玉	2
計	6

A を取り出す確率は

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

白を取り出したという条件の下で, それが A である条件付き確率は

$$\begin{aligned} P(A|白) &:= \frac{P(A \cap 白)}{P(白)} \\ &= \frac{2/6}{3/6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

定理 1 (乗法定理).

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

証明. 条件付き確率の定義より明らか. □

2 事象の独立性 (p. 83)

2.1 2つの事象

定義 2. $P(A|B) = P(A)$ なら A と B は独立という.

注 2. B において $A \cap B$ が起こる確率と, Ω において A が起こる確率が等しい. そのため B が起こったという情報が, A が起こる確率に影響しない.

注 3. 乗法定理より, 以下の 3 つは同値.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B) \end{aligned}$$

例 2. つぼの中に A または B と書かれた 2 色の玉が以下のように入っている.

種類	個数
A の白玉	2
A の黒玉	2
B の白玉	2
B の黒玉	2
計	8

A を取り出す確率は

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{4}{8} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

白を取り出したという条件の下で, それが A である条件付き確率は

$$\begin{aligned} P(A|\text{白}) &:= \frac{P(A \cap \text{白})}{P(\text{白})} \\ &= \frac{2/8}{4/8} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2 3 つ以上の事象

ある試行の事象を A, B, C とする.

定義 3. 以下が成り立つとき A, B, C は (相互に) 独立という.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

注 4. 4 つ以上の事象についても同様に定義する.

3 ベイズの定理 (p. 84)

Ω の分割を B_1, \dots, B_n とする. すなわち B_1, \dots, B_n は排反で $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$. B_1, \dots, B_n (原因) は異なる確率で事象 A (結果) をもたらす. A が起こったという条件の下で, B_1, \dots, B_n の条件付き確率を求める. 以下の確率は分かっている.

- $P(B_i)$: 各原因の確率
- $P(A|B_i)$: 各原因の下での A の条件付き確率

定義 4. $P(B_i)$ を B_i の事前確率という.

定義 5. $P(B_i|A)$ を B_i の事後確率という.

定理 2 (全確率の定理).

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

証明. B_1, \dots, B_n が排反だから $A \cap B_1, \dots, A \cap B_n$ も排反. したがって

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) \\ &= P(A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n)) \\ &= P((A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)) \\ &= P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

□

定理 3 (ベイズの定理).

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

証明. 乗法定理と全確率の定理より

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &:= \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \end{aligned}$$

□

例 3. 診断がガンである事象を A , 実際にガンであ

る事象を B とする。以下の確率が分かっている。

$$\begin{aligned} P(B) &= .005 \\ P(A|B) &= .95 \\ P(A^c|B^c) &= .95 \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} \\ &= \frac{.95 \cdot .005}{.95 \cdot .005 + .05 \cdot .995} \\ &= \frac{.00475}{.0545} \\ &\approx .0872 \end{aligned}$$

1000 人当たりの頻度で考えると分かりやすい。

例 4 (モンティ・ホール問題)。3 つのドアの 1 つは「当たり」、2 つは「はずれ」。挑戦者が 1 つを選択した後、司会者は残り 2 つから「はずれ」の方を開けて見せる (どちらも「はずれ」ならどちらかをランダムに選ぶ)。ここで挑戦者はドアを変更してもよい。挑戦者はドアを変更すべきか？

正解は「変更すべき」。挑戦者がドア A を選び、司会者がドア B を開けたとする。以下の通り事象を定義する。

- 事象 A : ドア A が当たり
- 事象 B : ドア B が当たり
- 事象 C : ドア C が当たり
- 事象 b : 司会者がドア B を開ける

このとき

$$\begin{aligned} P(A|b) &:= \frac{P(A \cap b)}{P(b)} \\ &= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\ &= \frac{(1/2)(1/3)}{(1/2)(1/3) + 0 + 1/3} \\ &= \frac{1}{3} \\ P(C|b) &:= \frac{P(C \cap b)}{P(b)} \\ &= \frac{P(b|C)P(C)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\ &= \frac{1/3}{(1/2)(1/3) + 0 + 1/3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

したがって A と b は独立だが、 C と b は独立でない。

例 5 (3 囚人問題)。3 人の囚人 A, B, C がいる。全員処刑の予定が 1 人だけ恩赦となった。誰が恩赦か囚人たちはまだ知らない。結果を知っている看守に対し、囚人 A が「B と C のどちらかは必ず処刑なのだから、処刑される 1 人の名前を教えても、私に情報を与えることにはならないだろう。1 人を教えてくれないか」と頼んだ。看守は納得して「囚人 B は処刑される」と教えてやった。囚人 A は自分が恩赦の確率が $1/2$ になったと喜んだ。囚人 A の認識は正しいか？

正解は「基本的に間違い」。以下の通り事象を定義する。

- 事象 A : 囚人 A が恩赦
- 事象 B : 囚人 B が恩赦
- 事象 C : 囚人 C が恩赦
- 事象 b : 看守が「囚人 B は処刑」と言う

このとき

$$\begin{aligned} P(A|b) &:= \frac{P(A \cap b)}{P(b)} \\ &= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \end{aligned}$$

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ なら (違うかもしれない)

$$\begin{aligned} P(A|b) &= \frac{P(b|A)(1/3)}{P(b|A)(1/3) + 0 + 1/3} \\ &= \frac{P(b|A)}{P(b|A) + 1} \end{aligned}$$

$P(b|A) = 1/2$ なら (違うかもしれない)

$$\begin{aligned} P(A|b) &= \frac{1/2}{1/2 + 1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

したがって (追加的な仮定の下で) A と b は独立.

4 今日のキーワード

条件付き確率, 乗法定理, 独立性 (2つの事象, 3つの事象), 事前確率, 事後確率, 全確率の定理, ベイズの定理

5 次回までの準備

復習 教科書第4章5節, 復習テスト5

予習 教科書第5章1節