第 6 回　確率変数と確率分布（5.1）

村澤 康友

2023 年 10 月 13 日

今日のポイント

1. 試行の結果によって値が決まる変数を確率変数という．確率変数の分布を確率分布という．
2. 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数を X の累積分布関数（cdf），$\Pr[X = x]$ を与える関数を X の確率質量関数（pmf）という．
3. 積分すると累積分布関数が得られる関数（累積分布関数の導関数）を確率密度関数（pdf）という．

目次

1　1 変数関数の微分

1.1　微分

滑らかな関数 $y = f(x)$ の接線の傾きを考える．

定義 1. $f(.)$ の x における**微分係数**は

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

定義 2. $f'(.)$ を $f(.)$ の**導関数**という．

注 1. $\mathrm{D}f(.)$, $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x(.)$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ などとも表記する．

定義 3. 導関数を求めることを関数の**微分**という．

1.2　微分の演算

定理 1 (関数の定数倍)**.**

$$\phi(.) := af(.) \Longrightarrow \phi'(.) = af'(.)$$

定理 2 (関数の和)**.**

$$\phi(.) := f(.) + g(.) \Longrightarrow \phi'(.) = f'(.) + g'(.)$$

定理 3 (関数の積)**.**

$$\phi(.) := f(.)g(.) \Longrightarrow \phi'(.) = f'(.)g(.) + f(.)g'(.)$$

定理 4 (関数の商)**.**

$$\phi(.) := \frac{f(.)}{g(.)} \Longrightarrow \phi'(.) = \frac{f'(.)g(.) - f(.)g'(.)}{g(.)^2}$$

定理 5 (合成関数)**.**

$$\phi(.) := f(g(.)) \Longrightarrow \phi'(.) = g'(.)f'(g(.))$$

注 2. すなわち $z = g(x)$，$y = f(z) = f(g(x))$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$$

定理 6 (逆関数)**.**

$$\phi(.) := f^{-1}(.) \Longrightarrow \phi'(.) = \frac{1}{f'(f^{-1}(.))}$$

注 3. すなわち

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}$$

1.3 微分の公式

定義 4. 次式を満たす e を**ネイピア数**という.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

定理 7 (指数関数)**.**

$$f(x) := \mathrm{e}^x \Longrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x$$

定理 8 (対数関数)**.**

$$f(x) := \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

定理 9 (べき関数)**.** 任意の整数 n について

$$f(x) := x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

系 1. $x > 0$ なら任意の実数 n について

$$f(x) := x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

注 4. $x \leq 0$ だと x^n は実数とは限らない. 例えば $0^{-1} = \infty$, $(-1)^{1/2} = \mathrm{i}$.

2 確率変数（p. 87）

定義 5. 試行の結果によって値が決まる変数を**確率変数**という.

例 1. コイントスに対して

$$X := \begin{cases} 1 & （表） \\ 0 & （裏） \end{cases}$$

とすれば X は確率変数.

定義 6. 確率変数の分布を**確率分布**という.

注 5. 度数分布と似た概念.

3 確率分布

3.1 累積分布関数（p. 92）

確率変数 X の確率分布を表現する.

定義 7. 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数を X の**累積分布関数**（*cumulative distribution function, cdf*）という.

注 6. $F_X(.)$ で表す. すなわち $F_X(x) := \Pr[X \leq x]$.

注 7. 弱い不等号 $\leq$ で定義する.

注 8. 度数分布の累積相対度数に相当.

例 2. X をサイコロの目の数とすると

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/6 \\ \vdots & \\ 6 & \text{with pr. } 1/6 \end{cases}$$

X の cdf は

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1/6 & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ \vdots & \\ 5/6 & \text{for } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{for } 6 \leq x \end{cases}$$

$F_X(.)$ のグラフは図 1 の通り.

$F_X(.)$ は以下の性質をもつ.

定理 10 (増加関数)**.**

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

証明. $x_1 < x_2$ なら

$$\begin{aligned} F_X(x_2) &:= \Pr[X \leq x_2] \\ &= \Pr[X \leq x_1] + \Pr[x_1 < X \leq x_2] \\ &\geq \Pr[X \leq x_1] \\ &= F_X(x_1) \end{aligned}$$

□

定理 11.

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$

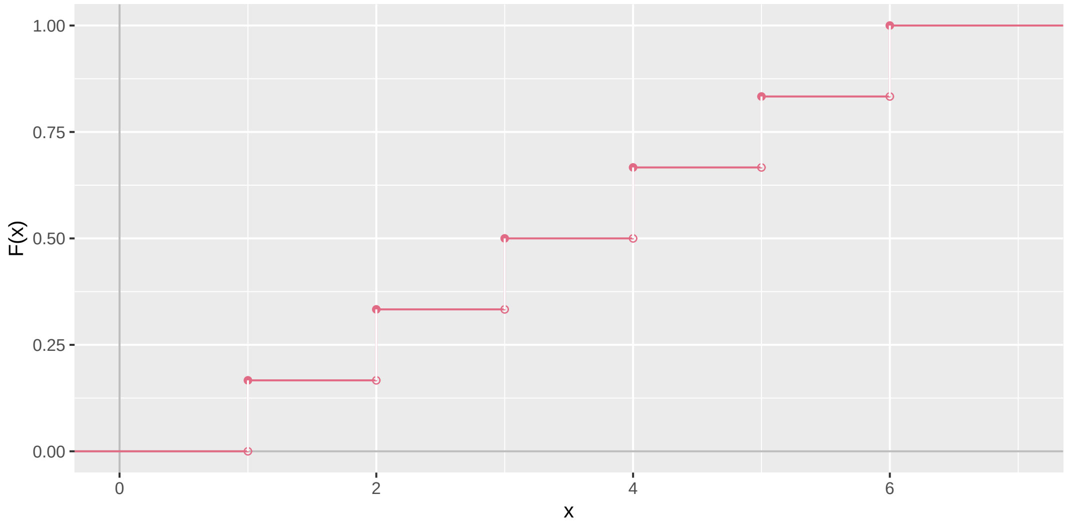

図 1　サイコロの目の cdf

証明. 省略. □

定理 12 (右連続). 任意の x_0 において

$$\lim_{x \downarrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$$

証明. 省略. □

注 9. 左連続とは限らない.

注 10. 逆に以上の性質をもつ $F(.)$ は cdf. 例えば

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x \end{cases} \quad \text{（一様分布）}$$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 - 1/x & \text{for } x \ge 1 \end{cases} \quad \text{（パレート分布）}$$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 - 1/\mathrm{e}^x & \text{for } x \ge 0 \end{cases} \quad \text{（指数分布）}$$

$$F(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} \quad \text{（ロジスティック分布）}$$

それぞれのグラフは図 2 の通り.

3.2　離散分布の確率質量関数（p. 90）

定義 8. 取りうる値の集合が可算である確率変数を**離散確率変数**という.

定義 9. 離散確率変数の確率分布を**離散分布**という.

定義 10. 任意の x に対して $\Pr[X = x]$ を与える関数を X の**確率質量関数** (*probability mass function, pmf*) という.

注 11. $p_X(.)$ で表す. すなわち $p_X(x) := \Pr[X = x]$.

注 12. 度数分布の相対度数に相当.

注 13. cdf の定義より

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\ &= \sum_{x' \le x} \Pr[X = x'] \\ &= \sum_{x' \le x} p_X(x') \end{aligned}$$

また

$$\sum_x p_X(x) = 1$$

逆にこれを満たす非負の $p(.)$ は pmf.

例 3. X をサイコロの目の数とすると, X の pmf は

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{for } x = 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$p_X(.)$ のグラフは図 3 の通り.

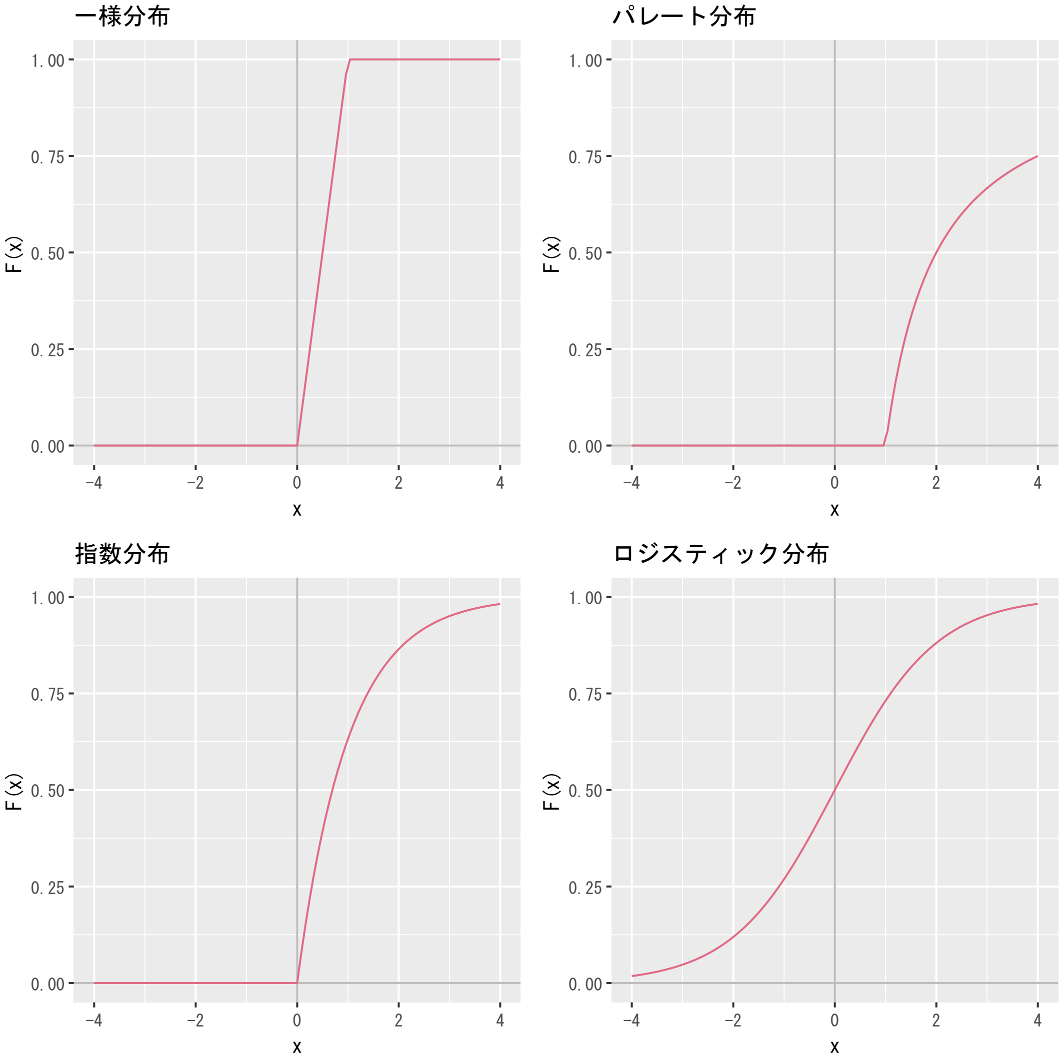

図 2　cdf の例

3.3　連続分布の確率密度関数（p. 90）

ルーレットの円周は非可算無限個の点から成る．この場合，個々の点で止まる確率は 0（無限小）なので，pmf は役に立たない．

定義 11. 連続な cdf をもつ確率変数を**連続確率変数**という．

定義 12. 連続確率変数の確率分布を**連続分布**という．

定義 13. 任意の x について

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

となる $f_X(.)$ を X の**確率密度関数**（*probability density function, pdf*）という．

注 14. 任意の a, b について

$$\Pr[a < X \leq b] = \int_{a}^{b} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

図 4 を参照．また

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

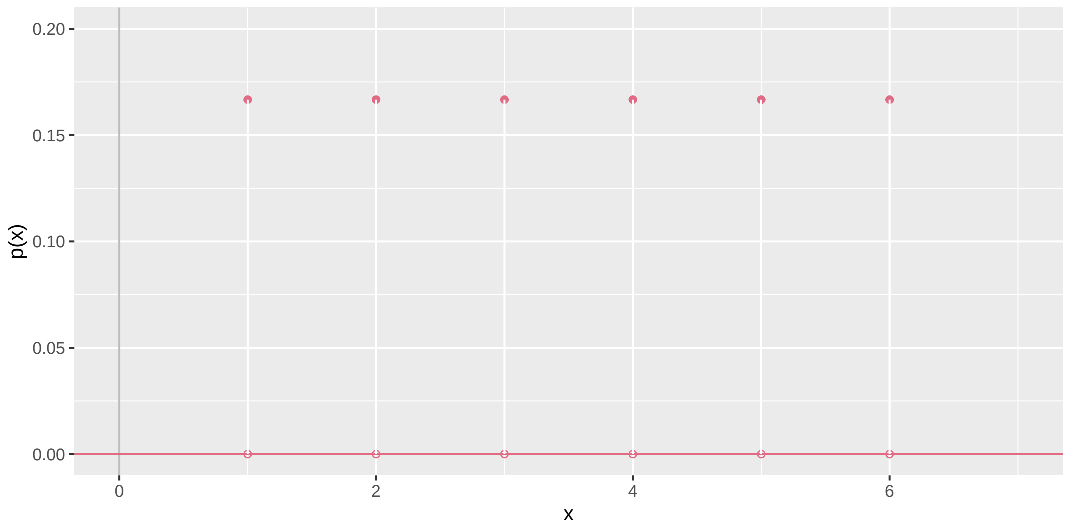

図 3　サイコロの目の pmf

逆にこれを満たす非負の $f(.)$ は pdf.

注 15. $F_X(.)$ が微分可能なら，微分積分学の基本定理より

$$f_X(x) := F'_X(x)$$

例 4. 例えば cdf が

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$
$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 - 1/x & \text{for } x \ge 1 \end{cases}$$
$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 - 1/\mathrm{e}^x & \text{for } x \ge 0 \end{cases}$$
$$F(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$$

なら対応する pdf は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1/x^2 & \text{for } x \ge 1 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1/\mathrm{e}^x & \text{for } x \ge 0 \end{cases}$$
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2}$$

それぞれのグラフは図 5 の通り.

4　今日のキーワード

確率変数，確率分布，累積分布関数（cdf），離散確率変数，離散分布，確率質量関数（pmf），連続確率変数，連続分布，確率密度関数（pdf）

5　次回までの準備

復習　教科書第 5 章 1 節，復習テスト 6

予習　教科書第 5 章 2–3 節

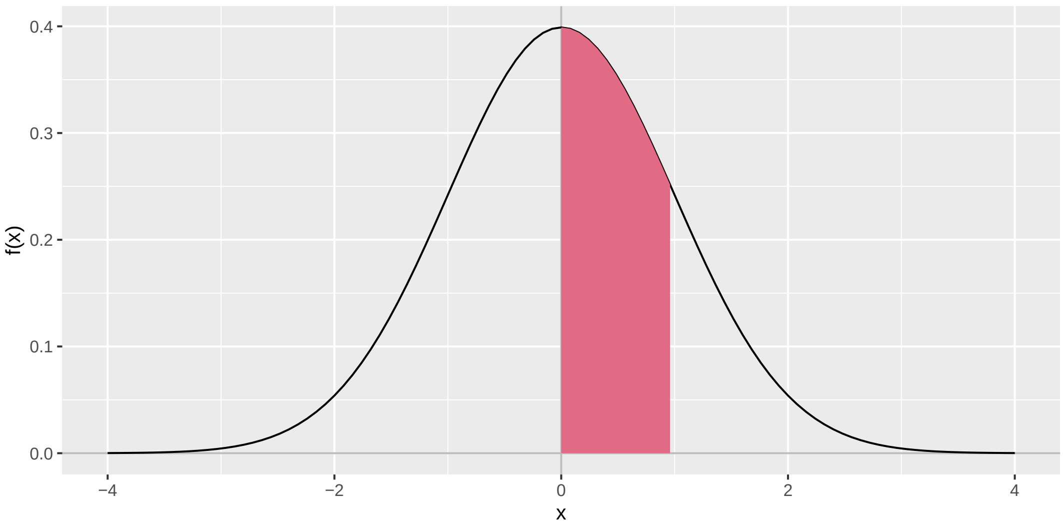

図 4　pdf による確率の評価

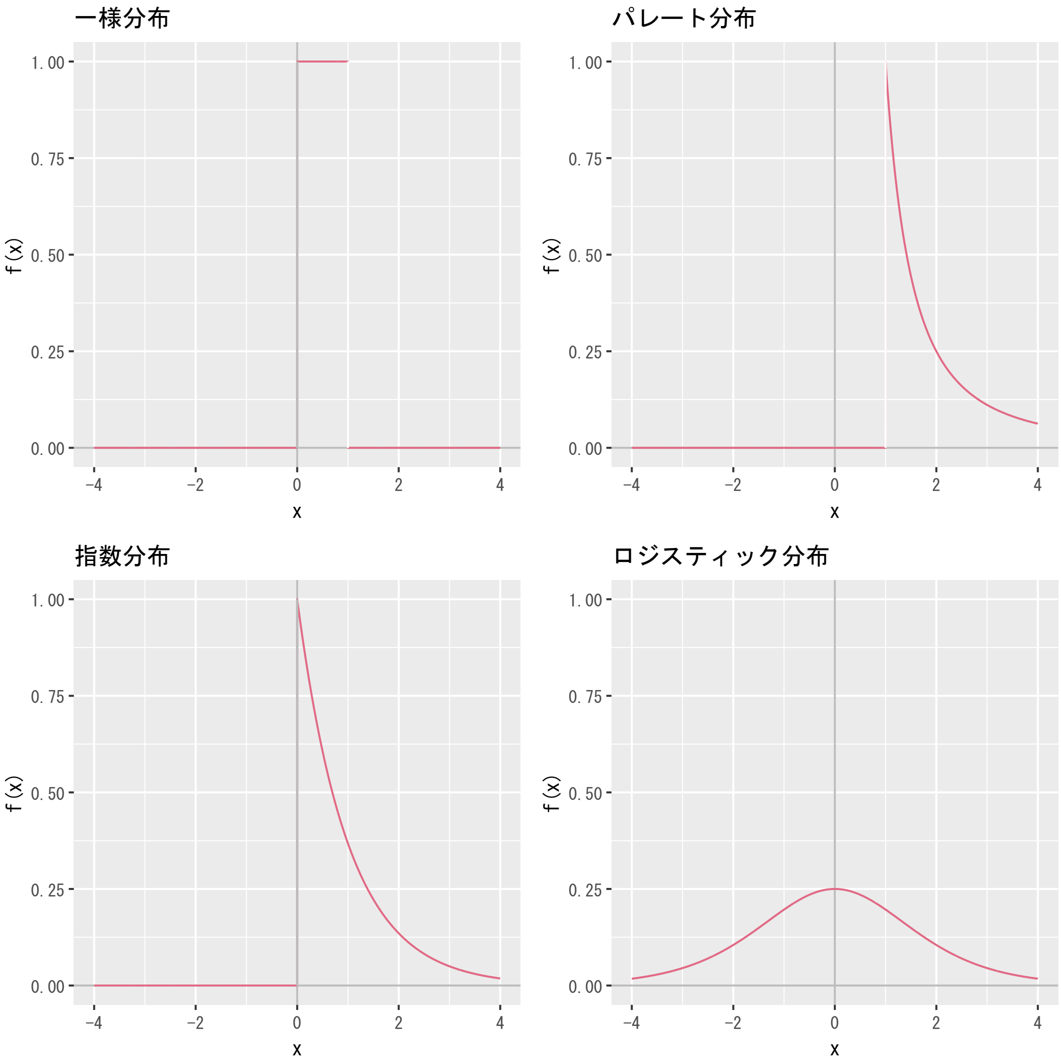

図 5　pdf の例