第 7 回　期待値と積率（5.2–5.3）

村澤 康友

2024 年 10 月 11 日

今日のポイント

1. 確率変数 X の期待値は，離散なら $\mathrm{E}(X) := \sum_x x p_X(x)$，連続なら $\mathrm{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x$.
2. 確率変数の特徴は積率で表せる．X の k 次の積率は $\mathrm{E}\left(X^k\right)$，中心積率は $\mathrm{E}\left((X-\mu_X)^k\right)$，標準化積率は $\mathrm{E}\left([(X-\mu_X)/\sigma_X]^k\right)$．1 次の積率を平均，2 次の中心積率を分散，3 次の標準化積率を歪度，4 次の標準化積率を尖度という．
3. X の積率母関数（mgf）は $M_X(t) := \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$．mgf の k 階導関数を $t=0$ で評価すると k 次の積率が得られる．

目次

1　1 変数関数の積分

1.1　不定積分

定義 1. $F'(.) = f(.)$ となる $F(.)$ を $f(.)$ の**原始関数**という．

注 1. 任意の定数 C について $F^*(.) := F(.) + C$ も $f(.)$ の原始関数.

定義 2. 原始関数を求めることを関数の**不定積分**という．

注 2. $f(.)$ の不定積分を $\int f(x) \, \mathrm{d}x$ と書く．すなわち

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x := F(x) + C$$

ただし C は任意の積分定数.

1.2　定積分

定義 3. 区間 $[a,b]$ 上の $f(.)$ の**定積分**は

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x := F(b) - F(a)$$

注 3. 積分定数が消えるので定積分は一意.

注 4. $y=0$，$y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ で囲まれた領域の面積を表す.

1.3　積分の演算

定理 1 (関数の定数倍)**.**

$$\int cf(x) \, \mathrm{d}x = c \int f(x) \, \mathrm{d}x + C$$

注 5. 定積分なら

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

定理 2 (関数の和)**.**

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x + C$$

注 6. 定積分なら

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

1.4　積分の公式

定理 3 (べき関数)**.** $n \neq -1$ なら

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

定理 4.

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$$

定理 5 (指数関数)**.**

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

2　期待値

2.1　期待値（p. 95）

X を確率変数とする.

定義 4. X の**期待値**は

$$\mathrm{E}(X) := \begin{cases} \sum_x x p_X(x) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x & \text{（連続）} \end{cases}$$

注 7. pmf・pdf を重みとした加重平均.

例 1. 次の確率変数を考える.

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

X の期待値は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 1\cdot p + 0\cdot(1-p) \\ &= p \end{aligned}$$

2.2　確率変数の関数の期待値（p. 95）

定義 5. $g(X)$ の**期待値**は

$$\mathrm{E}(g(X)) := \begin{cases} \sum_x g(x) p_X(x) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x & \text{（連続）} \end{cases}$$

2.3　期待値の線形性（p. 96）

定理 6 (期待値の線形性)**.** 任意の a, b について

$$\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

証明. X が連続なら

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(aX+b) &:= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\,\mathrm{E}(X) + b \end{aligned}$$

離散の場合も同様. □

注 8. より一般的に (X,Y) の 2 変量分布について

$$\mathrm{E}(aX+bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)$$

2 変量分布は第 7 章で扱う.

3　積率

3.1　積率（p. 102）

定義 6. X の k **次の積率（モーメント）**は

$$\mu_{X,k} := \mathrm{E}\left(X^k\right)$$

定義 7. 1 次の積率を**平均**という.

注 9. μ_X と表す.

注 10. 確率変数の平均は期待値であり，データの（算術）平均とは異なる.

3.2　中心積率（p. 102）

定義 8. X の k **次の中心積率**は

$$\mu'_{X,k} := \mathrm{E}\left((X-\mu_X)^k\right)$$

定義 9. 2 次の中心積率を**分散**という.

注 11. $\mathrm{var}(X)$ と書く. すなわち

$$\mathrm{var}(X) := \mathrm{E}\left((X-\mu_X)^2\right)$$

定義 10. 分散の平方根を**標準偏差**という.

注 12. σ_X と表す.

例 2. 次の確率変数を考える．

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

$\mu_X = p$ より X の分散は

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &:= (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

定理 7.

$$\operatorname{var}(X) = \operatorname{E}\left(X^2\right) - \mu_X^2$$

証明．

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &:= \operatorname{E}\left((X-\mu_X)^2\right) \\ &= \operatorname{E}\left(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2\right) \\ &= \operatorname{E}\left(X^2\right) - 2\mu_X \operatorname{E}(X) + \mu_X^2 \\ &= \operatorname{E}\left(X^2\right) - \mu_X^2 \end{aligned}$$

□

補題 1. 任意の a について

$$\operatorname{var}(aX) = a^2 \operatorname{var}(X)$$

証明．

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(aX) &:= \operatorname{E}\left((aX - \operatorname{E}(aX))^2\right) \\ &= \operatorname{E}\left((aX - a\operatorname{E}(X))^2\right) \\ &= \operatorname{E}\left([a(X - \operatorname{E}(X))]^2\right) \\ &= \operatorname{E}\left(a^2(X - \operatorname{E}(X))^2\right) \\ &= a^2 \operatorname{E}\left((X - \operatorname{E}(X))^2\right) \\ &= a^2 \operatorname{var}(X) \end{aligned}$$

□

補題 2. 任意の b について

$$\operatorname{var}(X+b) = \operatorname{var}(X)$$

証明．

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X+b) &:= \operatorname{E}\left((X + b - \operatorname{E}(X+b))^2\right) \\ &= \operatorname{E}\left([X + b - (\operatorname{E}(X) + b)]^2\right) \\ &= \operatorname{E}\left((X - \operatorname{E}(X))^2\right) \\ &= \operatorname{var}(X) \end{aligned}$$

□

定理 8. 任意の a, b について

$$\operatorname{var}(aX+b) = a^2 \operatorname{var}(X)$$

証明．前 2 補題より

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(aX+b) &= \operatorname{var}(aX) \\ &= a^2 \operatorname{var}(X) \end{aligned}$$

□

3.3 標準化積率（p. 102）

定義 11. 確率変数から平均を引き標準偏差で割る変換を**標準化**という．

注 13. 式で表すと

$$Z := \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

$\operatorname{E}(Z) = 0,\ \operatorname{var}(Z) = 1$ となる．

定義 12. X の k **次の標準化積率**は

$$\alpha_{X,k} := \operatorname{E}\left(\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^k\right)$$

定義 13. 3 次の標準化積率を**歪度**という．

注 14. すなわち

$$\alpha_{X,3} := \operatorname{E}\left(\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^3\right)$$

pdf が対称なら $\alpha_{X,3} = 0$.

例 3. 右に歪んだ分布（図 1）

定義 14. 4 次の標準化積率を**尖度**という．

注 15. すなわち

$$\alpha_{X,4} := \operatorname{E}\left(\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^4\right)$$

正規分布なら $\alpha_{X,4} = 3$. これを基準に（過剰）尖度を $\alpha_{X,4} - 3$ と定義することもある．

例 4. 正規分布より尖った分布（図 2）．

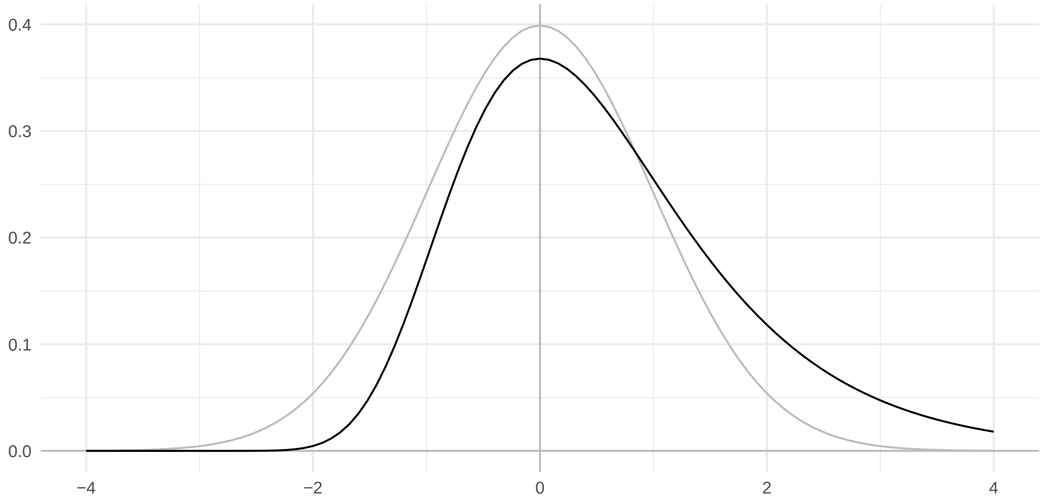

図 1　右に歪んだ分布（ガンベル分布）

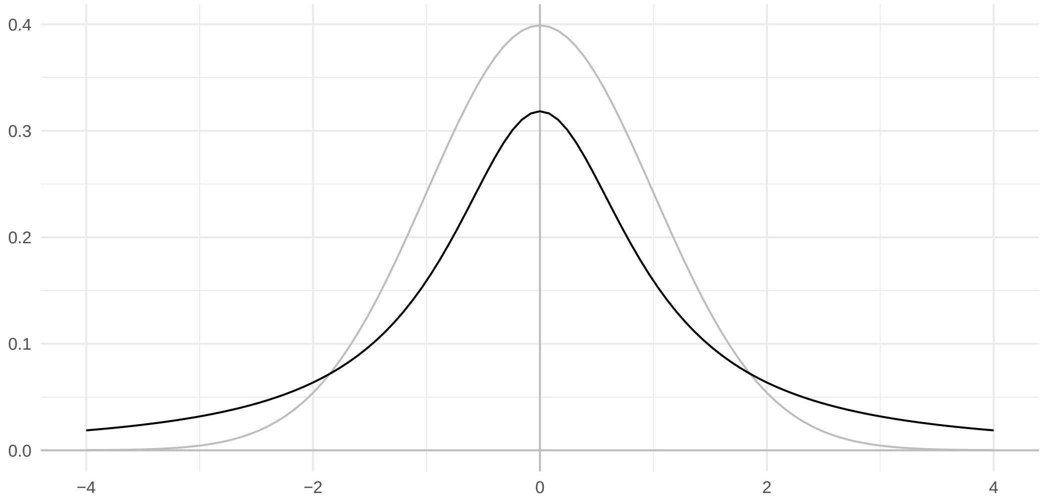

図 2　正規分布より尖った分布（コーシー分布）

4　積率母関数（p. 103）

定義 15. X の**積率母関数**（*moment generating function, mgf*）は

$$M_X(t) := \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

注 16. 積分でなく微分で積率が求まる.

注 17. cdf・pmf/pdf と 1 対 1 対応するので確率分布の 3 つ目の表現と言える.

定理 9. 任意の k について

$$\frac{\mathrm{d}^k M_X}{\mathrm{d}t^k}(0) = \mathrm{E}\left(X^k\right)$$

証明. 任意の k について

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k M_X}{\mathrm{d}t^k}(t) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\,\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\\ &= \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\mathrm{e}^{tX}\right)\\ &= \mathrm{E}\left(X^k\mathrm{e}^{tX}\right)\end{aligned}$$

$t = 0$ なら $\mathrm{E}\left(X^k\right)$. $\square$

例 5. 次の確率変数を考える.

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

X の mgf は

$$\begin{aligned} M_X(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \\ &= \mathrm{e}^{t \cdot 1} \cdot p + \mathrm{e}^{t \cdot 0} \cdot (1-p) \\ &= p\mathrm{e}^t + 1 - p \end{aligned}$$

微分すると

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= p\mathrm{e}^t \\ M''_X(t) &= p\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

1・2 次の積率は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= M'_X(0) \\ &= p \\ \mathrm{E}\left(X^2\right) &= M''_X(0) \\ &= p \end{aligned}$$

分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

5　今日のキーワード

期待値，平均，積率（モーメント），中心積率，分散，標準偏差，標準化，標準化積率，歪度，尖度，積率母関数（mgf）

6　次回までの準備

復習　教科書第 5 章 2–3 節，復習テスト 7

予習　教科書第 5 章 4–5 節