第 8 回　チェビシェフの不等式，確率変数の変換（5.4–5.5）

村澤 康友

2023 年 10 月 20 日

今日のポイント

1. マルコフ／チェビシェフの不等式は，分布の裾の確率の上限を与える．
2. $Y := g(X)$ の分布は，X が離散なら pmf，連続なら cdf で導出する．
3. $[0, 1]$ 上の一様乱数 U を $F^{-1}(U)$ と変換した乱数の cdf は $F(.)$（逆関数法）．

目次

1　チェビシェフの不等式

1.1　分布の裾の確率

確率変数 X の分布の裾の確率を求めたい（図 1）．

- 分布が既知なら cdf・pmf・pdf から $\Pr[|X| \geq c]$ が正確に求まる．
- 分布が未知でも積率から $\Pr[|X| \geq c]$ の上限が求まる．

1.2　マルコフの不等式

補題 1（マルコフの不等式）．任意の $c > 0$ について

$$\Pr[|X| \geq c] \leq \frac{\mathrm{E}(|X|)}{c}$$

証明．X が連続なら

$$\begin{aligned}
c \Pr[|X| \geq c] &= c \int_{|x| \geq c} f_X(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x| \geq c} c f_X(x) \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{|x| \geq c} |x| f_X(x) \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{E}(|X|)
\end{aligned}$$

離散の場合も同様．□

注 1．X の分布にかかわらず $\Pr[|X| \geq c]$ の上限を与える．

1.3　チェビシェフの不等式（p. 104）

定理 1（チェビシェフの不等式）．任意の $c > 0$ について

$$\Pr[|X - \mu_X| \geq c] \leq \frac{\sigma_X^2}{c^2}$$

証明．マルコフの不等式より

$$\begin{aligned}
\Pr[|X - \mu_X| \geq c] &= \Pr\left[|X - \mu_X|^2 \geq c^2\right] \\
&\leq \frac{\mathrm{E}\left(|X - \mu_X|^2\right)}{c^2} \\
&= \frac{\mathrm{var}(X)}{c^2}
\end{aligned}$$

□

注 2．c が大きいときマルコフの不等式よりシャープな上限を与える．また大数の法則（第 8 章）の証明に用いる．

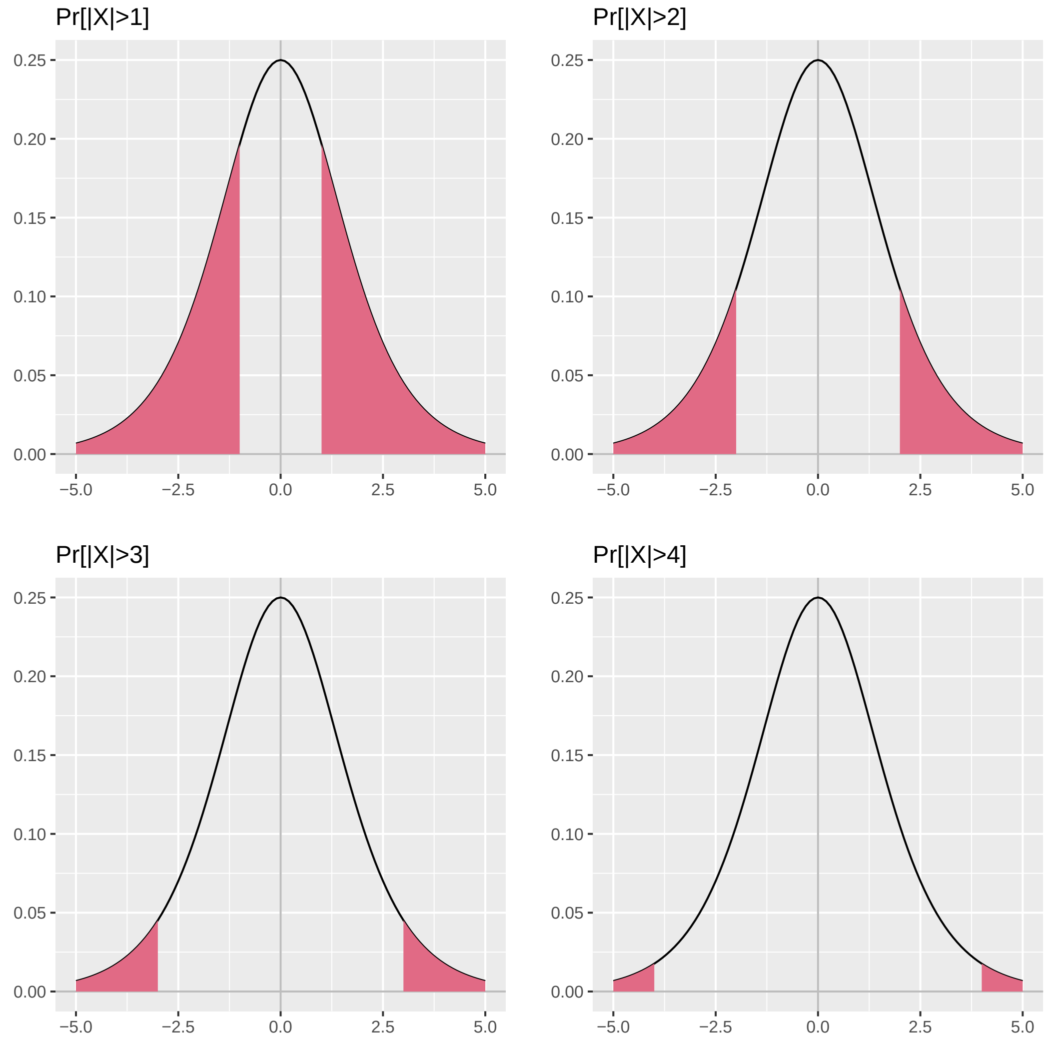

図 1　分布の裾の確率

例 1. 標準化変量を Z とすると偏差値は $10Z + 50$. 例えば

- $|Z| \geq 2 \Longleftrightarrow$ 偏差値 30 以下か 70 以上
- $|Z| \geq 3 \Longleftrightarrow$ 偏差値 20 以下か 80 以上

チェビシェフの不等式より

$$\Pr[|Z| \geq 2] \leq \frac{1}{4}$$
$$\Pr[|Z| \geq 3] \leq \frac{1}{9}$$

2　確率変数の変換

2.1　離散分布

X を離散確率変数，$g(.)$ を 1 対 1 の関数とする．$Y := g(X)$ の分布を求めたい．Y の pmf は

$$\begin{aligned} p_Y(y) &:= \Pr[Y = y] \\ &= \Pr[g(X) = y] \\ &= \Pr\left[X = g^{-1}(y)\right] \\ &= p_X\left(g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

例 2. 次の確率変数を考える．

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

X の pmf は

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } x = 0, 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$Y := 2X$ とすると

$$Y = \begin{cases} 2 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

Y の pmf は

$$\begin{aligned} p_Y(y) &:= \Pr[Y = y] \\ &= \Pr[2X = y] \\ &= \Pr\left[X = \frac{y}{2}\right] \\ &= p_X\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } y = 0, 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{aligned}$$

X, Y の pmf のグラフは図 2 の通り．

2.2 連続分布（p. 106）

X を連続確率変数，$g(.)$ を 1 対 1 の関数とする．また $g(.), F_X(.)$ は微分可能とする．$Y := g(X)$ の分布を求めたい．連続確率変数の変換では，まず cdf を変換し，それから pdf を求める．

1. $g(.)$ が厳密な増加関数なら，Y の cdf は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \le y] \\ &= \Pr[g(X) \le y] \\ &= \Pr\left[X \le g^{-1}(y)\right] \\ &= F_X\left(g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

pdf は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= \mathrm{D}g^{-1}(y) f_X\left(g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

2. $g(.)$ が厳密な減少関数なら，Y の cdf は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \le y] \\ &= \Pr[g(X) \le y] \\ &= \Pr\left[X \ge g^{-1}(y)\right] \\ &= 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

pdf は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= -\mathrm{D}g^{-1}(y) f_X\left(g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

まとめると

$$f_Y(y) = \left|\mathrm{D}g^{-1}(y)\right| f_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

$\left|\mathrm{D}g^{-1}(y)\right|$ を**変換のヤコビアン**という．これがないと $f_Y(.)$ を全範囲で積分しても 1 にならない．

例 3. X を $[0, 1]$ 上の一様確率変数とする．X の pdf は

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$Y := 2X$ とすると

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \le y] \\ &= \Pr[2X \le y] \\ &= \Pr\left[X \le \frac{y}{2}\right] \\ &= F_X\left(\frac{y}{2}\right) \\ f_Y(y) &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{aligned}$$

X, Y の cdf と pdf のグラフは図 3 の通り．

2.3 乱数の生成（p. 106）

確率分布 (cdf) $F(.)$ からの乱数を生成したい．一様乱数はコンピューターで生成できる．U を $[0, 1]$ 上の一様確率変数とする．

定理 2. *$X := F^{-1}(U)$ の cdf は $F(.)$.*

証明.

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\ &= \Pr[F^{-1}(U) \le x] \\ &= \Pr[U \le F(x)] \\ &= F_U(F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

□

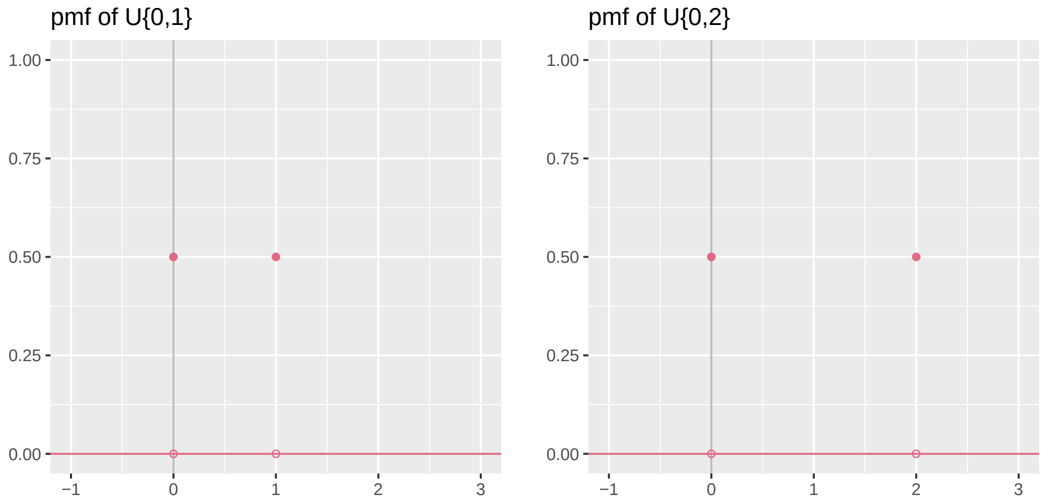

図 2　離散確率変数の変換

定義 1. 一様乱数 U を $F^{-1}(U)$ と変換して $F(.)$ からの乱数を生成する方法を**逆関数法**という．

例 4. $x > 0$ について

$$F(x) := 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

とすれば $F(.)$ は cdf（指数分布）．$F(.)$ の逆関数は

$$F^{-1}(y) = -\ln(1 - y)$$

したがって U が一様乱数なら $-\ln(1 - U)$ は指数分布にしたがう．

3　今日のキーワード

マルコフの不等式，チェビシェフの不等式，確率変数の変換（離散・連続），変換のヤコビアン，逆関数法

4　次回までの準備

提出　宿題 2，復習テスト 1–8

復習　教科書第 5 章 4–5 節，復習テスト 8

試験　(1) 教科書を読む (2) 用語の定義を覚える (3) 復習テストを自力で解く (4) 過去問に挑戦

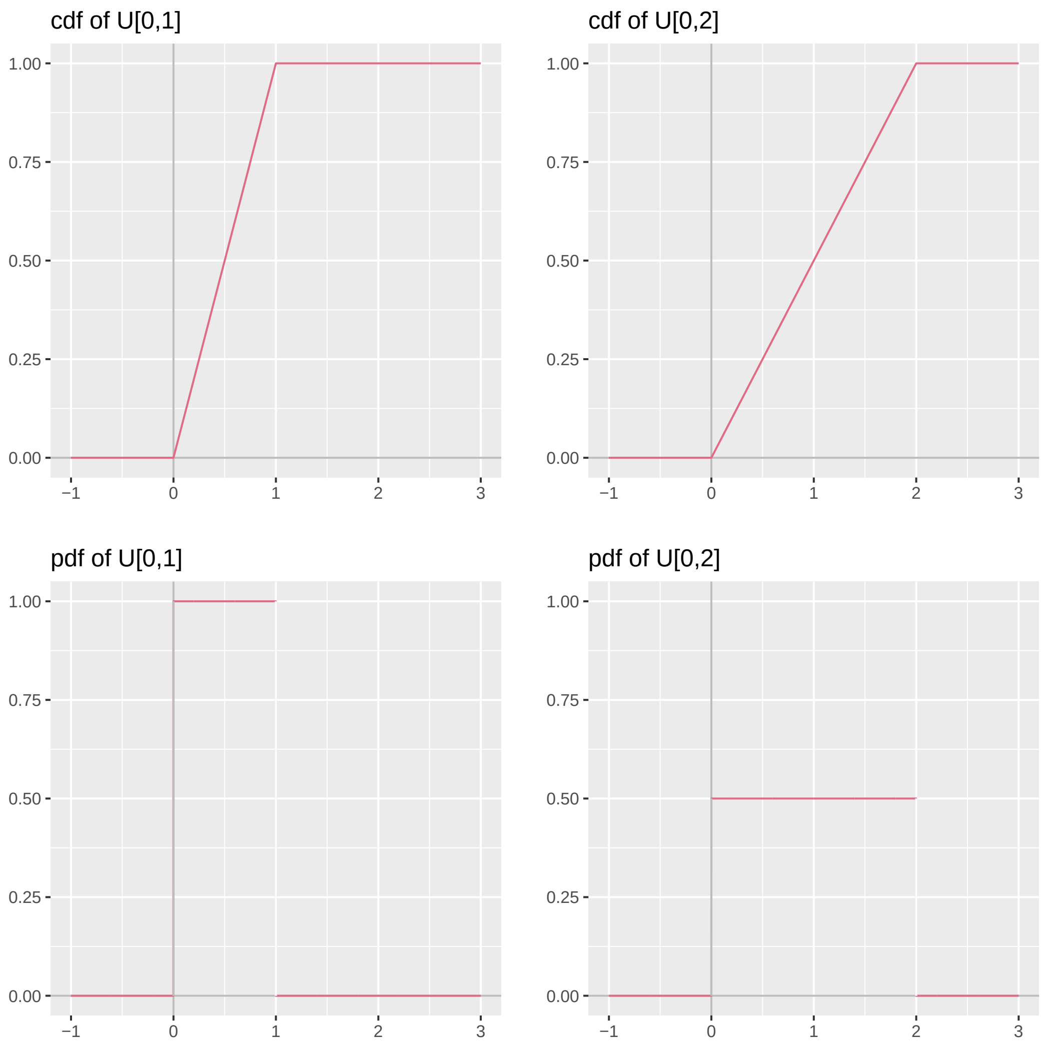

図 3　連続確率変数の変換