第 10 回　代表的な連続分布（6.6–6.7）

村澤 康友

2024 年 10 月 25 日

今日のポイント

1. pdf の値が均一な分布を一様分布という．
2. ポアソン分布にしがたう現象が初めて起こるまでの待ち時間の分布を指数分布という．
3. 測定誤差は正規分布にしたがう．正規分布の線形変換も正規分布であり，標準化した正規分布を標準正規分布という．正規分布の cdf は積分を含むので，標準正規分布表を用いて確率を計算する．

目次

1　一様分布（p. 127）　1

2　指数分布（p. 123）　2

3　正規分布　2

3.1　標準正規分布（p. 121）　2

3.2　正規分布（p. 120）　4

4　今日のキーワード　5

5　次回までの準備　5

1　一様分布（p. 127）

定義 1. $[a,b]$ 上の**一様分布**の pdf は

$$f(x):=\begin{cases}1/(b-a) & \text{for } x\in[a,b]\\ 0 & \text{for } x\notin[a,b]\end{cases}$$

注 1. $\mathrm{U}[a,b]$ と書く．

注 2. cdf は

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{for } x<a\\ (x-a)/(b-a) & \text{for } x\in[a,b]\\ 1 & \text{for } x>b\end{cases}$$

例 1. ルーレット．

例 2. $\mathrm{U}[0,1]$ の cdf と pdf は図 1 の通り．

定理 1. $U\sim\mathrm{U}[a,b]$ なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(U)&=\frac{a+b}{2}\\ \mathrm{var}(U)&=\frac{(a-b)^2}{12}\end{aligned}$$

証明. 平均は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(U)&=\int_a^b u\cdot\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{b-a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b\\ &=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}\\ &=\frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

2 次の積率は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(U^2\right)&=\int_a^b u^2\cdot\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{b-a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_a^b\\ &=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}\\ &=\frac{a^2+ab+b^2}{3}\end{aligned}$$

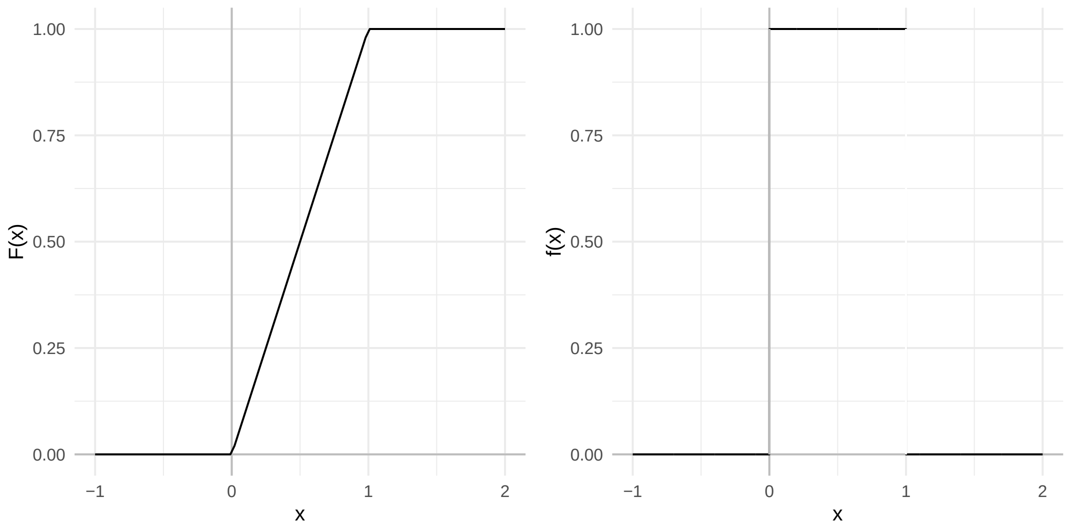

図 1　U[0, 1] の cdf と pdf

分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(U) &= \mathrm{E}\left(U^2\right) - \mathrm{E}(U)^2 \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} \\ &= \frac{(a-b)^2}{12}\end{aligned}$$

□

2　指数分布（p. 123）

単位時間当たりの成功回数の分布を $\mathrm{Poi}(\lambda)$ とする．y 時間での成功回数を X とすると $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda y)$．初成功までの待ち時間を Y とすると

$$\begin{aligned}\Pr[Y \le y] &= 1 - \Pr[Y > y] \\ &= 1 - \Pr[X = 0] \\ &= 1 - p_X(0) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\end{aligned}$$

定義 2. 指数分布の cdf は

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

注 3. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ と書く．

注 4. pdf は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

例 3. Exp(1) の cdf と pdf は図 2 の通り．

定理 2. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathrm{var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

証明. mgf を用いるのが簡単．教科書 p. 104 参照．

□

3　正規分布

3.1　標準正規分布（p. 121）

定義 3. 標準正規分布の pdf は

$$\phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}$$

注 5. $\mathrm{N}(0,1)$ と書く．

注 6. $\mathrm{N}(0,1)$ の cdf は $\Phi(.)$，pdf は $\phi(.)$ で表す．すなわち

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} \, \mathrm{d}z$$

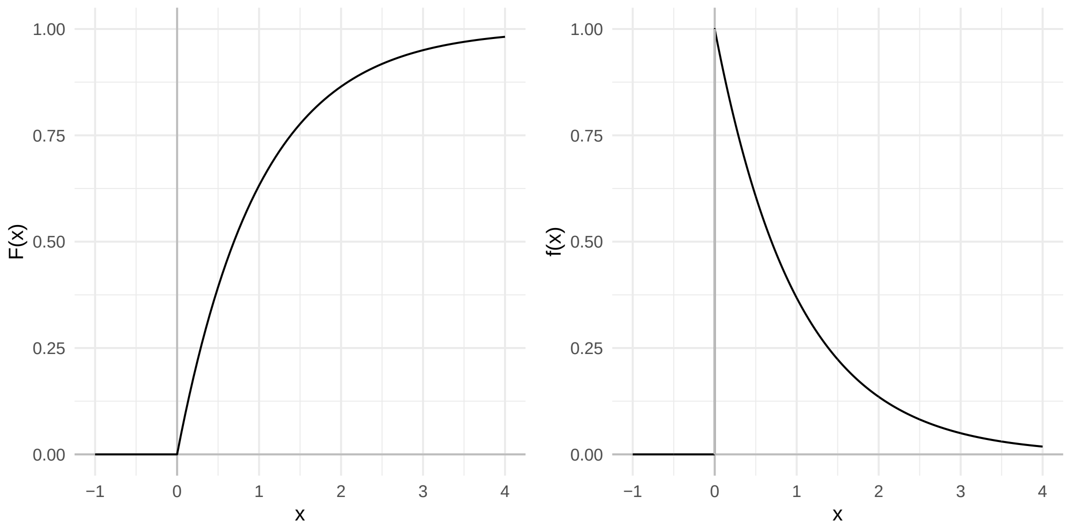

図 2　Exp(1) の cdf と pdf

例 4. N(0, 1) の cdf と pdf は図 3 の通り．

定義 4. $\Phi(.)$ の表を**標準正規分布表**という．

注 7. $Q(.) := 1 - \Phi(.)$ の表の場合も多い．

練習 1. $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ とする．標準正規分布表を利用して以下の確率を求めなさい．

1. $\Pr[Z \geq 1]$
2. $\Pr[Z \leq 1]$
3. $\Pr[Z \leq -1]$

補題 1. 任意の t について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z - t) \, \mathrm{d}z = 1$$

証明. $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ とすると，$X := t + Z$ の cdf は

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \Pr[t + Z \leq x] \\ &= \Pr[Z \leq x - t] \\ &= \Phi(x - t) \end{aligned}$$

X の pdf は

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= \phi(x - t) \end{aligned}$$

pdf の性質より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - t) \, \mathrm{d}x = 1$$

□

定理 3. N(0, 1) の *mgf* は

$$M(t) = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

証明. $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ とすると，mgf の定義より

$$\begin{aligned} M_Z(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tZ}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tz} \phi(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(z-t)^2/2 + t^2/2} \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z - t) \mathrm{e}^{t^2/2} \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z - t) \, \mathrm{d}z \mathrm{e}^{t^2/2} \end{aligned}$$

前補題より結果が得られる． □

系 1. N(0, 1) の平均は 0，分散は 1．

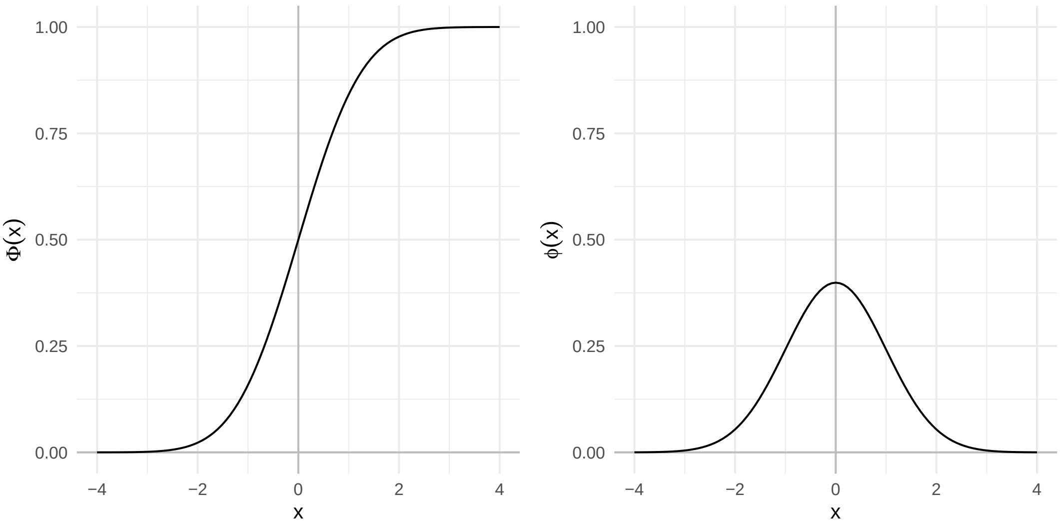

図 3　N$(0, 1)$ の cdf と pdf

証明. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると，前定理より

$$
\begin{aligned}
M_Z'(t) &= t\mathrm{e}^{t^2/2} \\
M_Z''(t) &= \mathrm{e}^{t^2/2} + t^2\mathrm{e}^{t^2/2}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= M_Z'(0) \\
&= 0 \\
\mathrm{E}\left(Z^2\right) &= M_Z''(0) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

分散の計算公式より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(Z) &= \mathrm{E}\left(Z^2\right) - \mathrm{E}(Z)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

3.2　正規分布（p. 120）

$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $X := \mu + \sigma Z$ とすると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(\mu + \sigma Z) \\
&= \mu + \sigma\,\mathrm{E}(Z) \\
&= \mu \\
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{var}(\mu + \sigma Z) \\
&= \sigma^2\,\mathrm{var}(Z) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

$\sigma > 0$ とすると，X の cdf は

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\
&= \Pr[\mu + \sigma Z \le x] \\
&= \Pr\left[Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

X の pdf は

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= F_X'(x) \\
&= \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

定義 5. 正規（ガウス）分布の pdf は

$$
f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)
$$

注 8. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ と書く.

例 5. 測定誤差，標本平均（中心極限定理）.

定理 4. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ の *mgf* は

$$
M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)
$$

証明. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $X := \mu + \sigma Z$ とすると，mgf の

定義より

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(\mu+\sigma Z)}\right) \\
&= \mathrm{e}^{t\mu}\,\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t\sigma Z}\right) \\
&= \mathrm{e}^{t\mu} M_Z(t\sigma) \\
&= \mathrm{e}^{t\mu}\mathrm{e}^{(t\sigma)^2/2} \\
&= \mathrm{e}^{\mu t+\sigma^2 t^2/2}
\end{aligned}
$$

□

定理 5. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ なら

$$
aX+b \sim \mathrm{N}\left(a\mu+b, a^2\sigma^2\right)
$$

証明. $aX+b$ の mgf は

$$
\begin{aligned}
M_{aX+b}(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(aX+b)}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{atX}\right)\mathrm{e}^{bt} \\
&= M_X(at)\mathrm{e}^{bt} \\
&= \exp\left(\mu(at)+\frac{\sigma^2(at)^2}{2}\right)\mathrm{e}^{bt} \\
&= \exp\left((a\mu+b)t+\frac{a^2\sigma^2t^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

これは $\mathrm{N}\left(a\mu+b, a^2\sigma^2\right)$ の mgf. □

系 2. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ なら

$$
\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)
$$

証明. 前定理で $a := 1/\sigma$, $b := -\mu/\sigma$ とする. □

注 9. したがって $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ の累積確率は標準正規分布表から求まる．すなわち

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\
&= \Pr\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

例 6. $X \sim \mathrm{N}(1,9)$ について $\Pr[X \le 2]$ を求める.

$(X-1)/3 \sim \mathrm{N}(0,1)$ より

$$
\begin{aligned}
\Pr[X \le 2] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \le \frac{2-1}{3}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 1-Q\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 1-.3707 \\
&= .6293
\end{aligned}
$$

4 今日のキーワード

一様分布，指数分布，標準正規分布，標準正規分布表正規分布，正規分布の標準化,

5 次回までの準備

提出 宿題 3

復習 教科書第 6 章 6–7 節，復習テスト 10

予習 教科書第 7 章 1–2 節