第 11 回　多変量分布（7.1–7.2）

村澤 康友

2024 年 10 月 29 日

今日のポイント

1. (X,Y) の同時 cdf は $F_{X,Y}(x,y) := \Pr[X \le x, Y \le y]$．$X$ または Y のみの cdf を周辺 cdf という．(X,Y) の同時 pmf は $p_{X,Y}(x,y) := \Pr[X = x, Y = y]$．$X$ または Y のみの pmf を周辺 pmf という．多重積分すると同時 cdf が得られる関数（同時 cdf の交差偏導関数）を同時 pdf という．
2. $g(X,Y)$ の期待値は，(X,Y) が離散なら $\sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$，連続なら $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$．$X$ と Y の共分散は $\operatorname{cov}(X,Y) := \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))$．標準化した確率変数の共分散を相関係数という．
3. $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き pmf は $p_{X|Y}(x|Y=y) := p_{X,Y}(x,y)/p_Y(y)$，条件付き pdf は $f_{X|Y}(x|Y=y) := f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y)$．$Y = y$ が与えられたときの X の条件付き期待値 $\mathrm{E}(X|Y=y)$ は，X が離散なら $\sum_x x p_{X|Y}(x|Y=y)$，連続なら $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y=y)\,\mathrm{d}x$．$p_{X|Y}(x|Y=y) = p_X(x)$ または $f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x)$ なら X と Y は独立という．

目次

1　多変数関数の微分

1.1　偏微分

2 変数関数 $z = f(x,y)$ において，1 つの変数のみに注目し，他の変数を定数とみなした微分を考える．

定義 1. (x,y) における $f(.,.)$ の x に関する**偏微分係数**は

$$f_x(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

定義 2. $f_x(.,.)$ を $f(.)$ の x に関する**偏導関数**という．

注 1. $\mathrm{D}_x f(.,.)$, $\partial f/\partial x(.,.)$ などとも表記する．

定義 3. 偏導関数を求めることを関数の**偏微分**という．

1.2 2 階偏微分

定義 4. 偏導関数の偏導関数を *2* **階偏導関数**という．

注 2. $f_{xx}(.,.)$, $\mathrm{D}^2_{xx} f(.,.)$, $\partial^2 f/\partial x^2(.,.)$ などと表記する．

定義 5. x に関する偏導関数 $f_x(.,.)$ の y に関する偏導関数を x と y に関する**交差偏導関数**という．

注 3. $f_{xy}(.,.)$, $\mathrm{D}^2_{xy} f(.,.)$, $\partial^2 f/\partial x \partial y(.,.)$ などと表記する．

定理 1 (ヤングの定理)**.** $f_{xy}(.,.)$，$f_{yx}(.,.)$ が連続なら

$$f_{xy}(.,.) = f_{yx}(.,.)$$

2 多変数関数の積分

2.1 累次積分

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上の定積分を考える．このとき積分の順番は 2 通りある．

1. y を所与として $f(., y)$ の区間 $[a, b]$ 上の定積分は
$$F(y) := \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$
$F(.)$ の区間 $[c, d]$ 上の定積分は
$$\int_c^d F(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
2. x を所与として $f(x, .)$ の区間 $[c, d]$ 上の定積分は
$$G(x) := \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$$
$G(.)$ の区間 $[a, b]$ 上の定積分は
$$\int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上で $f(.,.)$ が連続なら両者は等しい．すなわち

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

2.2 重積分

2 つの累次積分が等しければ定積分は一意に定まる．すなわち

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

注 4. 矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上で $z = 0$ と $z = f(x, y)$ に挟まれた領域の体積を表す．

3 同時分布と周辺分布

3.1 累積分布関数

(X, Y) を確率ベクトルとする．

定義 6. (X, Y) の**同時（結合）** *cdf* は，任意の (x, y) について

$$F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \le x, Y \le y]$$

例 1. $F_{X,Y}(.,.)$ のグラフの例（図 1）．

定義 7. X の**周辺** *cdf* は，任意の x について

$$F_X(x) := \Pr[X \le x]$$

注 5. 同時 cdf と周辺 cdf の関係は

$$\begin{aligned}F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\ &= \Pr[X \le x, Y < \infty] \\ &= F_{X,Y}(x, \infty)\end{aligned}$$

3.2 確率質量関数（p. 134）

(X, Y) を離散確率ベクトルとする．

定義 8. (X, Y) の**同時（結合）** *pmf* は，任意の (x, y) について

$$p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

定義 9. X の**周辺** *pmf* は，任意の x について

$$p_X(x) := \Pr[X = x]$$

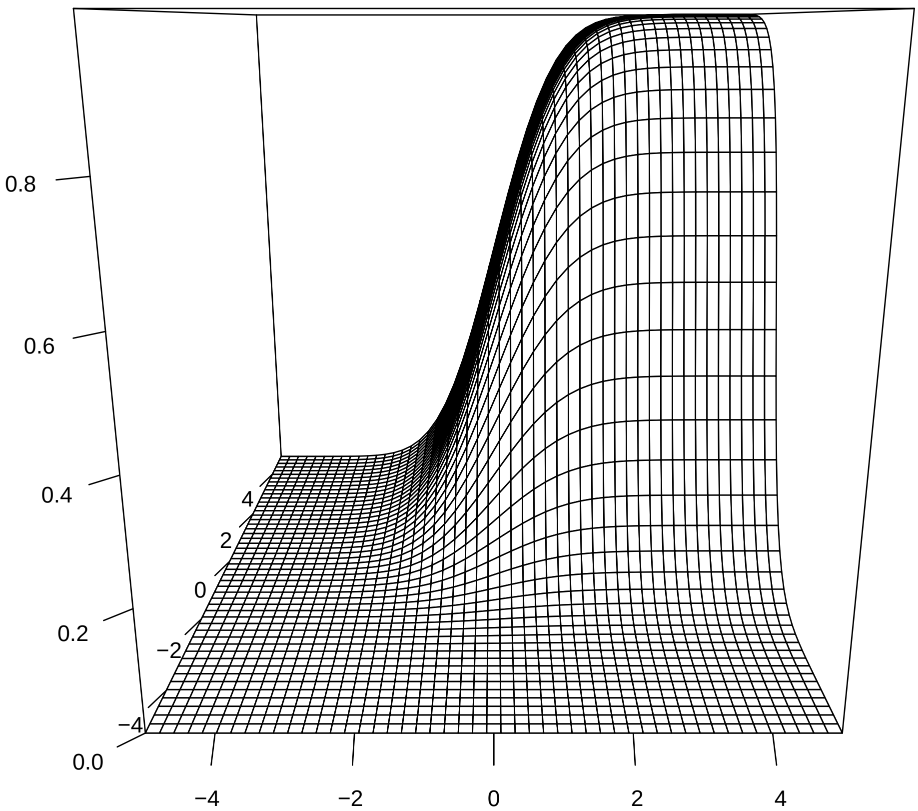

図 1　2 変量同時 cdf のグラフ

注 6. 同時 pmf と周辺 pmf の関係は

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

例 2. 2 つのサイコロを投げたときの大きい目（X）と小さい目（Y）の同時分布（表 1）.

3.3　確率密度関数（p. 135）

(X,Y) を連続確率ベクトルとする.

定義 10. 任意の (x,y) について

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

となる $f_{X,Y}(.,.)$ を (X,Y) の**同時（結合）***pdf* という.

注 7. 任意の a,b,c,d について

$$\Pr[a < X \le b, c < Y \le d] = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注 8. $F_{X,Y}(.,.)$ が微分可能なら

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x,y)$$

例 3. $f_{X,Y}(.,.)$ のグラフの例（図 2）

表 1　2 つのサイコロの大きい目（X）と小さい目（Y）の同時分布

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6	計
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
計	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

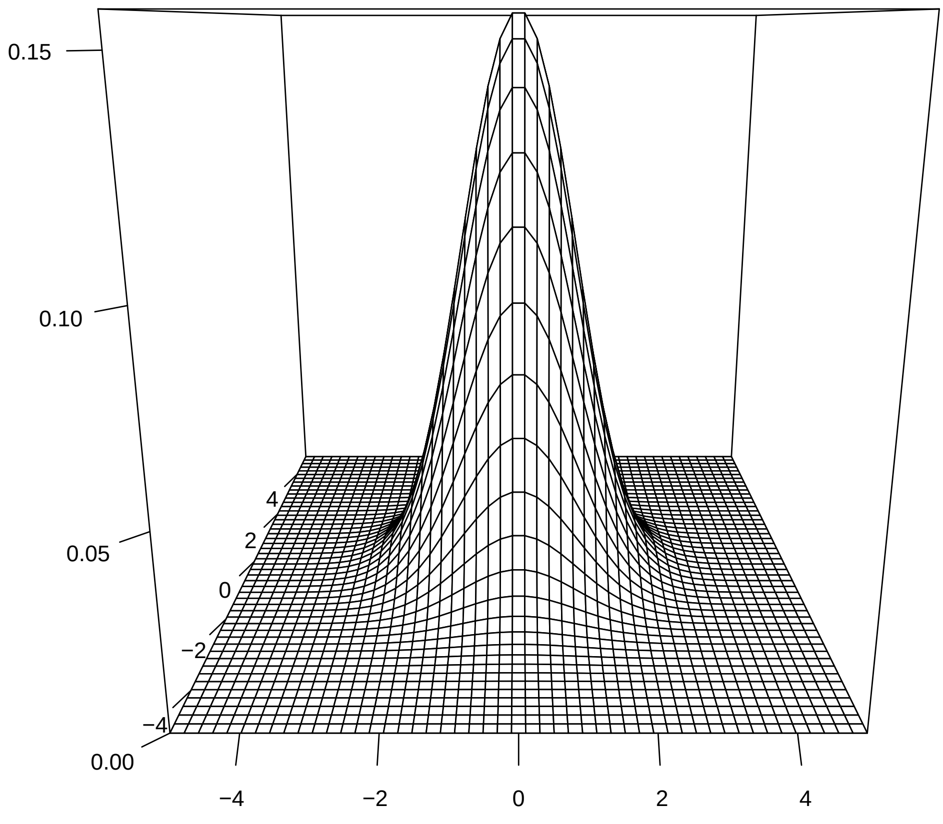

図 2　2 変量同時 pdf のグラフ

定義 11. X の**周辺** *pdf* は，任意の x について

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

4 積率

4.1 期待値

定義 12. $g(X,Y)$ の**期待値**は

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) := \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \text{（連続）} \end{cases}$$

定理 2 (期待値の線形性)**.**

$$\mathrm{E}(aX+bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)$$

証明. 復習テスト. □

4.2 共分散（p. 136）

定義 13. X と Y の**共分散**は

$$\mathrm{cov}(X,Y) := \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))$$

注 9. σ_{XY} と表す.

注 10. X が大きいと Y も大きいなら共分散は正，X が大きいと Y は小さいなら共分散は負.

定理 3.

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

証明. 復習テスト. □

補題 1.

$$\mathrm{cov}(X,Y+Z) = \mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(X,Z)$$

証明.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(X,Y+Z) \\
&:= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y+Z-\mathrm{E}(Y+Z))) \\
&= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)+Z-\mathrm{E}(Z))) \\
&= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))) \\
&\quad + \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Z-\mathrm{E}(Z))) \\
&= \mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(X,Z)
\end{aligned}$$

□

補題 2.

$$\mathrm{cov}(aX,bY) = ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(aX,bY) &:= \mathrm{E}((aX-\mathrm{E}(aX))(bY-\mathrm{E}(bY))) \\
&= \mathrm{E}((aX-a\,\mathrm{E}(X))(bY-b\,\mathrm{E}(Y))) \\
&= \mathrm{E}(a(X-\mathrm{E}(X))b(Y-\mathrm{E}(Y))) \\
&= ab\,\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))) \\
&= ab\,\mathrm{cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

□

定理 4.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(aX+bY) = a^2\,\mathrm{var}(X) &+ 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y) \\
&+ b^2\,\mathrm{var}(Y)
\end{aligned}$$

証明. 前 2 補題より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}(aX+bY) \\
&= \mathrm{cov}(aX+bY, aX+bY) \\
&= \mathrm{cov}(aX+bY, aX) + \mathrm{cov}(aX+bY, bY) \\
&= \mathrm{cov}(aX,aX) + \mathrm{cov}(bY,aX) \\
&\quad + \mathrm{cov}(aX,bY) + \mathrm{cov}(bY,bY) \\
&= a^2\,\mathrm{cov}(X,X) + ab\,\mathrm{cov}(Y,X) \\
&\quad + ab\,\mathrm{cov}(X,Y) + b^2\,\mathrm{cov}(bY,bY) \\
&= a^2\,\mathrm{var}(X) + 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y) + b^2\,\mathrm{var}(Y)
\end{aligned}$$

□

4.3 相関係数（p. 137）

定義 14. 標準化した確率変数の共分散を**相関係数**という.

注 11. すなわち X と Y の相関係数は

$$\mathrm{corr}(X,Y) := \mathrm{cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

注 12. ρ_{XY} と表す.

注 13. X と Y の関係の強さを表す.

定理 5.

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\rho_{XY} &:= \operatorname{cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))}{\sigma_X\sigma_Y} \\
&= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}
\end{aligned}
$$

□

定義 15. $\rho_{XY}=0$ なら X と Y は**無相関**という.

定理 6 (コーシー＝シュワルツの不等式)**.**

$$|\operatorname{cov}(X,Y)| \le \operatorname{var}(X)^{1/2}\operatorname{var}(Y)^{1/2}$$

証明. 教科書 p. 138 参照. □

系 1.

$$|\rho_{XY}| \le 1$$

5　条件付き分布と確率変数の独立性

5.1　条件付き分布（p. 141）

定義 16. $Y \le y$ が与えられたときの X の**条件付き** *cdf* は，任意の x について

$$F_{X|Y}(x|Y\le y) := \frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)}$$

注 14. 条件付き確率で定義する.

定義 17. $Y=y$ が与えられたときの X の**条件付き** *pmf* は，任意の x について

$$p_{X|Y}(x|Y=y) := \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

定義 18. $Y=y$ が与えられたときの X の**条件付き** *pdf* は，任意の x について

$$f_{X|Y}(x|Y=y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

注 15. 条件付き確率と同様に定義する.

定義 19. $Y=y$ が与えられたときの X の**条件付き期待値**は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X|Y=y) \\
&:= \begin{cases} \sum_x x p_{X|Y}(x|Y=y) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y=y)\,\mathrm{d}x & \text{（連続）} \end{cases}
\end{aligned}
$$

定義 20. $Y=y$ が与えられたときの X の**条件付き分散**は

$$\operatorname{var}(X|Y=y) := \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X|Y=y))^2|Y=y\right)$$

5.2　確率変数の独立性（p. 143）

定義 21. 任意の (x,y) について

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x)$$

なら X と Y は**独立**という.

注 16. 条件付き pdf の定義より

$$
\begin{aligned}
&f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x) \\
&\iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)
\end{aligned}
$$

定義 22. 任意の $(x_1,\dots,x_n)$ について

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

なら $X_1,\dots,X_n$ は**独立**という.

注 17. cdf で定義してもよい.

定理 7. X と Y が独立なら，任意の $f(.)$ と $g(.)$ について

$$\mathrm{E}(f(X)g(Y)) = \mathrm{E}(f(X))\,\mathrm{E}(g(Y))$$

証明. (X,Y) が連続なら

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(f(X)g(Y)) \\
&:= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)f_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f_X(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(f(X))\,\mathrm{E}(g(Y))
\end{aligned}
$$

離散の場合も同様. □

系 2. X と Y が独立なら

$$\mathrm{cov}(X, Y) = 0$$

注 18. すなわち独立なら無相関．逆は必ずしも成立しない．

6 今日のキーワード

同時 cdf，周辺 cdf，同時 pmf，周辺 pmf，同時 pdf，周辺 pdf，期待値の線形性，共分散，確率変数の線形結合の分散，相関係数，条件付き cdf，条件付き pmf，条件付き pdf，条件付き期待値，条件付き分散，確率変数の独立性，独立と無相関

7 次回までの準備

復習 教科書第 7 章 1–2 節，復習テスト 11

予習 教科書第 7 章 3–4 節