中級統計学：第 1 回中間試験

村澤 康友

2019 年 10 月 25 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）推測統計学
   （b）標本点
   （c）連続確率変数
   （d）中心積率
2. （30 点）血縁関係の DNA 鑑定について，以下のことが分かっている．
   - 血縁関係があった場合，「血縁関係あり」と鑑定される確率は 99.9%
   - 血縁関係がなかった場合，「血縁関係なし」と鑑定される確率は 99.9%

   鑑定を受ける前に，当事者は 99.9% の確率で血縁関係があると信じている．「血縁関係あり」と鑑定される事象を A，実際に血縁関係がある事象を B とする．「血縁関係なし」と鑑定されたとき，実際に血縁関係がない確率 $P(B^c|A^c)$ を求めたい．
   （a）$P(A^c \cap B^c)$ を求めなさい．
   （b）$P(A^c)$ を求めなさい．
   （c）$P(B^c|A^c)$ を求めなさい．
3. （50 点）次の確率変数を考える．

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/3 \\ 0 & \text{with pr. } 2/3 \end{cases}$$

   $Y := 2X - 1$ とする．
   （a）Y の確率質量関数を式とグラフで表しなさい．
   （b）Y の累積分布関数を式とグラフで表しなさい．
   （c）$\mathrm{E}(Y)$ を求めなさい．
   （d）$\mathrm{E}\left(Y^2\right)$ を求めなさい．
   （e）$\mathrm{var}(Y)$ を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 統計的推測の理論体系.
   (b) 試行において起こりうる結果.
       - 統計の「標本」と確率の「標本点」は（ほぼ）無関係.
   (c) 連続な cdf をもつ確率変数.
       - pdf の定義は 0 点．Wikipedia の「連続確率分布」も参照.
   (d) X の k 次の中心積率は $\mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^k\right)$.
       - べき乗の外に括弧がないと 0 点（式の意味が変わる)．教科書の定義は誤り.
2. 条件つき確率
   (a) 乗法定理より

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= P(A^c|B^c)P(B^c) \\
&= .999 \cdot .001 \\
&= .000999
\end{aligned}
$$

   - 「乗法定理」で 5 点.

   (b) 全確率の定理より

$$
\begin{aligned}
P(A^c) &= P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) \\
&= P(A^c|B)P(B) + P(A^c|B^c)P(B^c) \\
&= .001 \cdot .999 + .999 \cdot .001 \\
&= .001998
\end{aligned}
$$

   - 「全確率の定理」で 5 点.

   (c) ベイズの定理（条件つき確率の定義）より

$$
\begin{aligned}
P(B^c|A^c) &= \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} \\
&= \frac{.000999}{.001998} \\
&= .5
\end{aligned}
$$

   - 「ベイズの定理」で 5 点.
3. 離散分布の変換
   (a)

$$
Y = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/3 \\ -1 & \text{with pr. } 2/3 \end{cases}
$$

したがって

$$
p_Y(y) := \begin{cases} 1/3 & \text{for } y = 1 \\ 2/3 & \text{for } y = -1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
$$

グラフは省略.

- pmf を変換する場合は

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &:= \Pr[Y = y] \\
&= \Pr[2X - 1 = y] \\
&= \Pr\left[X = \frac{y+1}{2}\right] \\
&= p_X\left(\frac{y+1}{2}\right) \\
&= \begin{cases} 1/3 & \text{for } (y+1)/2 = 1 \\ 2/3 & \text{for } (y+1)/2 = 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1/3 & \text{for } y = 1 \\ 2/3 & \text{for } y = -1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\
&:= \begin{cases} 0 & \text{for } y < -1 \\ 2/3 & \text{for } -1 \leq y < 1 \\ 1 & \text{for } y \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

グラフは省略.

- cdf を変換する場合は前問と同様.

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= 1 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{2}{3} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{E}(2X - 1)$ を直接計算してもよい.
- $\mathrm{E}(2X - 1) = 2\,\mathrm{E}(X) - 1$ として $\mathrm{E}(X)$ を計算して求めてもよい.

(d)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(Y^2\right) &= 1^2 \cdot \frac{1}{3} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{3} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{E}\left((2X - 1)^2\right)$ を直接計算してもよい.
- $\mathrm{E}\left((2X - 1)^2\right)$ を展開して $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ と $\mathrm{E}(X)$ を計算して求めてもよい.

(e)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

- 分散の計算公式で 5 点.