中級統計学：第 2 回中間試験

村澤 康友

2019 年 11 月 22 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a)（区間 $[a,b]$ 上の）一様分布
   (b) 条件つき確率質量関数
   (c) 畳み込み
   (d) 漸近分布
2. （30 点）$X \sim \mathrm{N}(0,1)$ と $Y \sim \mathrm{N}(2,4)$ は独立とする．標準正規分布表を利用して以下の確率を求めなさい．
   (a) $\Pr[|X| \leq 2]$
   (b) $\Pr\left[Y^2 > 4\right]$
   (c) $\Pr[3X - 2Y < 3]$
3. （50 点）2 次元確率ベクトル (X,Y) は以下の同時分布をもつ．

$X \backslash Y$	0	1
0	1/5	1/5
1	2/5	1/5

   (a) X, Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい．
   (b) X, Y の期待値と分散をそれぞれ求めなさい．
   (c) XY の分布を求めなさい．
   (d) X と Y の共分散を求めなさい．
   (e) X と Y の相関係数を求めなさい．

解答例

1. 確率の基本用語
   (a) 区間 $[a,b]$ 上の一様分布の pdf は

$$f(x) := \begin{cases} 1/(b-a) & \text{for } x \in [a,b] \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

      - pdf か cdf で定義しなければ 0 点.
      - 「pdf が一定」は「区間 $[a,b]$ 上」の説明がないので 2 点.

   (b) $p_{X|Y}(x|Y=y) := p_{X,Y}(x,y)/p_Y(y)$.
      - $g(.), h(.)$ で pmf を表すのは一般的でなく，pdf とも区別できないので，それらの定義がなければ 0 点.

   (c) 独立な確率変数の和の分布を求めること.
   (d) n が大きいときの X_n の近似分布.
      - 「$n \to \infty$ の分布（極限分布）」は必ずしも存在しないので 0 点.

2. 正規分布の確率計算
   (a)

$$\begin{aligned} \Pr[|X| \le 2] &= \Pr[-2 \le X \le 2] \\ &= 1 - 2\Pr[X > 2] \\ &= 1 - 2 \cdot .022750 \\ &= 1 - .0455 \\ &= .9545 \end{aligned}$$

      - $\Pr[-2 \le X \le 2]$ で 2 点.
      - 対称性を利用して $1 - 2\Pr[X > 2]$ で 5 点.

   (b) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると

$$\begin{aligned} \Pr\left[Y^2 > 4\right] &= \Pr[|Y| > 2] \\ &= \Pr[Y < -2] + \Pr[Y > 2] \\ &= \Pr\left[\frac{Y-2}{2} < \frac{-2-2}{2}\right] + \Pr\left[\frac{Y-2}{2} > \frac{2-2}{2}\right] \\ &= \Pr[Z < -2] + \Pr[Z > 0] \\ &= \Pr[Z > 2] + \Pr[Z > 0] \\ &= .022750 + .5 \\ &= .522750 \end{aligned}$$

      - $\Pr[Y < -2] + \Pr[Y > 2]$ で 2 点.
      - 標準化して $\Pr[Z < -2] + \Pr[Z > 0]$ で 5 点.

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(3X-2Y) &= 3\,\mathrm{E}(X) - 2\,\mathrm{E}(Y) \\
&= 3\cdot 0 - 2\cdot 2 \\
&= -4 \\
\mathrm{var}(3X-2Y) &= 3^2\,\mathrm{var}(X) + 2^2\,\mathrm{var}(Y) \\
&= 9\cdot 1 + 4\cdot 4 \\
&= 25
\end{aligned}
$$

したがって $3X-2Y \sim \mathrm{N}(-4,25)$ より

$$
\begin{aligned}
\Pr[3X-2Y<3] &= \Pr\left[\frac{3X-2Y-(-4)}{5} < \frac{3-(-4)}{5}\right] \\
&= \Pr[Z<1.4] \\
&= 1-\Pr[Z\ge 1.4] \\
&= 1-.080757 \\
&= .919243
\end{aligned}
$$

- $3X-2Y \sim \mathrm{N}(-4,25)$ で 5 点（平均 2 点，分散 2 点，正規分布 1 点）.

3. 最も単純な 2 変量分布

(a)

$$
X = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 3/5 \\ 0 & \text{with pr. } 2/5 \end{cases}
$$

$$
Y = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 2/5 \\ 0 & \text{with pr. } 3/5 \end{cases}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &:= 1\cdot\frac{3}{5} + 0\cdot\frac{2}{5} \\
&= \frac{3}{5} \\
\mathrm{E}(Y) &:= 1\cdot\frac{2}{10} + 0\cdot\frac{3}{3} \\
&= \frac{2}{5} \\
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \mathrm{E}(X)(1-\mathrm{E}(X)) \\
&= \frac{6}{25} \\
\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}(Y)(1-\mathrm{E}(Y)) \\
&= \frac{6}{25}
\end{aligned}
$$

- 平均各 2 点，分散各 3 点.

(c)

$$XY = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/5 \\ 0 & \text{with pr. } 4/5 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \\ &= -\frac{1}{25} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \operatorname{corr}(X,Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}} \\ &= \frac{-1/25}{6/25} \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$