中級統計学：第 1 回中間試験

村澤 康友

2020 年 10 月 23 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 統計的推測
   (b) 標準化
   (c) 事象
   (d) 歪度
2. （30 点）箱 A に金貨が 2 枚，箱 B に銀貨が 2 枚，箱 C に金貨と銀貨が 1 枚ずつ入っている．受け取った箱が A, B, C である確率は，いずれも 1/3 とする．箱の中から取り出した 1 枚目のコインが金貨であったとき，2 枚目も金貨である条件つき確率を求めたい．
   (a) 1 枚目に箱 A の金貨を取り出す確率を求めなさい．（ヒント：乗法定理）
   (b) 1 枚目に金貨を取り出す確率を求めなさい．（ヒント：全確率の定理）
   (c) 1 枚目に金貨を取り出したとき，その箱が A である（＝ 2 枚目も金貨である）条件つき確率を求めなさい．（ヒント：ベイズの定理）
3. （50 点）次の確率変数を考える．

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p-q \\ -1 & \text{with pr. } q \end{cases}$$

   ただし $p, q \in [0,1]$ で $p+q \leq 1$ とする．
   (a) X の確率質量関数を式で表しなさい．
   (b) X の累積分布関数を式で表しなさい．
   (c) $\mathrm{E}(X)$ を求めなさい．
   (d) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ を求めなさい．
   (e) $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 一部の観察から全体について推測すること.
   (b) 変量の値から平均を引き，標準偏差で割る変換.
      - 「平均を 0，分散を 1 に揃えること」は標準化の結果であり定義でないので 2 点.
   (c) 標本空間の部分集合.
      - 教科書の「起こりうることがら」は定義として誤り.
   (d) 3 次の標準化積率.
      - 式で表すなら $\mathrm{E}\left([(X-\mu)/\sigma]^3\right)$ または $\mathrm{E}\left((X-\mu)^3/\sigma^3\right)$.
      - 教科書の $\mathrm{E}(X-\mu)^3/\sigma^3$ は誤り.
      - 「分布の非対称性の方向，およびその程度を表す」は定義でないので 0 点.
2. 条件つき確率
   (a) 乗法定理より

$$\begin{aligned}P(A\cap 金) &= P(金\,|A)P(A)\\ &= 1\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

   (b) 全確率の定理より

$$\begin{aligned}P(金) &= P(A\cap 金)+P(B\cap 金)+P(C\cap 金)\\ &= P(金\,|A)P(A)+P(金\,|B)P(B)+P(金\,|C)P(C)\\ &= 1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   (c) ベイズの定理より

$$\begin{aligned}P(A|\,金) &= \frac{P(A\cap 金)}{P(金)}\\ &= \frac{1/3}{1/2}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

3. 離散分布
   (a)

$$p_X(x) := \begin{cases} q & \text{for } x=-1\\ 1-p-q & \text{for } x=0\\ p & \text{for } x=1\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

(b)

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ q & \text{for } -1 \leq x < 0 \\ 1-p & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot p + (-1) \cdot q + 0 \cdot (1-p-q) \\ &= p - q \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X^2\right) &:= 1^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot q + 0^2 \cdot (1-p-q) \\ &= p + q \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= p + q - (p-q)^2 \end{aligned}$$