中級統計学：第 2 回中間試験

村澤 康友

2020 年 11 月 20 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) ベルヌーイ分布
   (b) 同時確率質量関数
   (c) 条件つき分散
   (d) 再生性
2. （30 点）$X \sim \mathrm{N}(0,1)$ と $Y \sim \mathrm{N}(2,3)$ は独立とする．
   (a) $Z := X - Y$ の分布を求めなさい．
   (b) $\Pr[|Z| > 4]$ を標準正規分布表を利用して求めなさい．
   (c) 共分散 $\mathrm{cov}(X,Z)$ と相関係数 $\mathrm{corr}(X,Z)$ を求めなさい．
3. （50 点）2 次元確率ベクトル (X,Y) は以下の同時分布をもつ．

$X\backslash Y$	0	1
0	1/2	1/8
1	1/4	1/8

   (a) Y の周辺確率質量関数を求めなさい．
   (b) Y の期待値と分散を求めなさい．
   (c) $X = 0,1$ のときの Y の条件つき確率質量関数をそれぞれ求めなさい．
   (d) $X = 0,1$ のときの Y の条件つき期待値をそれぞれ求めなさい．
   (e) $X = 0,1$ のときの Y の条件つき分散をそれぞれ求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) ベルヌーイ試行における成功を 1，失敗を 0 とした確率変数の分布.
      - 「1 と 0 で表す」がなければ 0 点.
   (b) (X,Y) の同時 pmf は，任意の (x,y) について
   $$p_{X,Y}(x,y) := \Pr[X=x, Y=y]$$
   (c) $Y=y$ が与えられたときの X の条件つき分散は
   $$\operatorname{var}(X|Y=y) := \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X|Y=y))^2|Y=y\right)$$
   (d) 畳み込んでも分布の型が変わらない性質.
2. 正規分布
   (a) 期待値の線形性より
   $$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(X-Y)\\ &= \mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)\\ &= 0-2\\ &= -2\end{aligned}$$
   X と Y は独立なので
   $$\begin{aligned}\operatorname{var}(Z) &= \operatorname{var}(X-Y)\\ &= \operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)\\ &= 1+3\\ &= 4\end{aligned}$$
   正規分布の線形変換は正規分布なので $Z \sim \mathrm{N}(-2,4)$.
      - 平均 3 点，分散 4 点，分布 3 点.
   (b)
   $$\Pr[|Z|>4] = \Pr[Z<-4] + \Pr[Z>4]$$
   標準正規分布表より
   $$\begin{aligned}\Pr[Z<-4] &= \Pr\left[\frac{Z-(-2)}{2} < \frac{-4-(-2)}{2}\right]\\ &= \Pr[\mathrm{N}(0,1)<-1]\\ &= \Pr[\mathrm{N}(0,1)>1]\\ &= .15866\\ \Pr[Z>4] &= \Pr\left[\frac{Z-(-2)}{2} > \frac{4-(-2)}{2}\right]\\ &= \Pr[\mathrm{N}(0,1)>3]\\ &= .0013499\end{aligned}$$
   したがって $\Pr[|Z|>4] = .1600099$.

- 前問の分布と整合的なら OK.

（c）X と Y は独立なので

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Z) &= \operatorname{cov}(X, X-Y) \\
&= \operatorname{cov}(X, X) - \operatorname{cov}(X, Y) \\
&= \operatorname{var}(X) \\
&= 1 \\
\operatorname{corr}(X, Z) &= \frac{\operatorname{cov}(X, Z)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Z)}} \\
&= \frac{1}{1 \cdot 2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- 各 5 点.
- 相関係数は共分散と整合的なら OK.

3. 最も単純な 2 変量分布

（a）

$$p_Y(y) := \begin{cases} 3/4 & \text{for } y = 0 \\ 1/4 & \text{for } y = 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 確率 0 のケースがなければ 2 点減.
- pmf でなければ 4 点.

（b）

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &:= 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} \\
\operatorname{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \mathrm{E}(Y)(1 - \mathrm{E}(Y)) \\
&= \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

- 各 5 点.

（c）

$$p_{Y|X}(y|X=0) := \begin{cases} 4/5 & \text{for } y = 0 \\ 1/5 & \text{for } y = 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$p_{Y|X}(y|X=1) := \begin{cases} 2/3 & \text{for } y = 0 \\ 1/3 & \text{for } y = 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 各 5 点.
- 確率 0 のケースがなければ各 1 点減.

- pmf でなければ各 2 点.

（d）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y|X=0) &:= 0\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot\frac{1}{5}\\
&= \frac{1}{5}\\
\mathrm{E}(Y|X=1) &:= 0\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

- 各 5 点.

（e）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(Y|X=0) &= \mathrm{E}(Y|X=0)(1-\mathrm{E}(Y|X=0))\\
&= \frac{4}{25}\\
\mathrm{var}(Y|X=1) &= \mathrm{E}(Y|X=1)(1-\mathrm{E}(Y|X=1))\\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

- 各 5 点.