中級統計学：第 1 回中間試験／経済統計 I：中間試験

村澤 康友

提出期限：2021 年 5 月 17 日 (月)
提出方法：My KONAN（甲南）／授業支援システム（府大）

注意：指定のワードファイルの解答用紙に解答を入力し，pdf ファイルに変換して提出すること．何を参照してもよいが，決して他人と相談しないこと．また自分の解答を決して他人に教えないこと．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 条件付き確率
   (b)（3 つの事象の）独立性
   (c)（確率変数の）標準化
   (d) 積率母関数
2. （30 点）次の確率変数を考える．
$$X := \begin{cases} 2 & \text{with pr. } p^2 \\ 1 & \text{with pr. } 2p(1-p) \\ 0 & \text{with pr. } (1-p)^2 \end{cases}$$
   ただし $p \in [0,1]$ とする．
   (a) $\mathrm{E}(X)$ を求めなさい．
   (b) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ を求めなさい．
   (c) $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい．
3. （50 点）X は次の累積分布関数をもつ．
$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x^2/100 & \text{for } 0 \le x \le 10 \\ 1 & \text{for } 10 < x \end{cases}$$
   $Y := X/2$ とする．
   (a) $\Pr[1 < X \le 2]$ を求めなさい．
   (b) $\Pr[1 < Y \le 2]$ を求めなさい．
   (c) X の確率密度関数を求めなさい．
   (d) Y の累積分布関数を求めなさい．
   (e) Y の確率密度関数を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語

 (a) B が起こったという条件の下での A の条件付き確率は

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

 ただし $P(B) > 0$.

 (b) 以下が成り立つとき A, B, C は（相互に）独立という.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

 (c) 確率変数から平均を引き標準偏差で割る変換.

 - 式で書くと $(X - \mu)/\sigma$.

 (d) X の積率母関数は

$$M_X(t) := \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

2. 離散分布の期待値と積率

 (a)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 2 \cdot p^2 + 1 \cdot 2p(1-p) + 0 \cdot (1-p)^2 \\ &= 2p^2 + 2p(1-p) \\ &= 2p(p + 1 - p) \\ &= 2p \end{aligned}$$

 - 定義に基づく計算式で 5 点.

 (b)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X^2\right) &:= 2^2 \cdot p^2 + 1^2 \cdot 2p(1-p) + 0^2 \cdot (1-p)^2 \\ &= 4p^2 + 2p(1-p) \\ &= 2p(2p + 1 - p) \\ &= 2p(p+1) \end{aligned}$$

 - 定義に基づく計算式で 5 点.

 (c)

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= 2p(p+1) - (2p)^2 \\ &= 2p(p + 1 - 2p) \\ &= 2p(1-p) \end{aligned}$$

 - 分散の計算公式で 5 点.

3. 連続確率変数の変換

(a)

$$\begin{aligned}\Pr[1 < X \leq 2] &= \Pr[X \leq 2] - \Pr[X \leq 1] \\ &= F_X(2) - F_X(1) \\ &= \frac{2^2}{100} - \frac{1^2}{100} \\ &= \frac{3}{100}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\Pr[1 < Y \leq 2] &= \Pr\left[1 < \frac{X}{2} \leq 2\right] \\ &= \Pr[2 < X \leq 4] \\ &= \Pr[X \leq 4] - \Pr[X \leq 2] \\ &= F_X(4) - F_X(2) \\ &= \frac{4^2}{100} - \frac{2^2}{100} \\ &= \frac{12}{100} \\ &= \frac{3}{25}\end{aligned}$$

- (d) の結果を説明なしで使ったら 0 点.

(c) $f_X(.) = F'_X(.)$ より

$$f_X(x) = \begin{cases} x/50 & \text{for } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

- 簡単な微分なので結果のみの解答も可とし，部分点は与えない.

(d)

$$\begin{aligned}F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\ &= \Pr\left[\frac{X}{2} \leq y\right] \\ &= \Pr[X \leq 2y] \\ &= F_X(2y) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } 2y < 0 \\ (2y)^2/100 & \text{for } 0 \leq 2y \leq 10 \\ 1 & \text{for } 10 < 2y \end{cases}\end{aligned}$$

すなわち

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ y^2/25 & \text{for } 0 \leq y \leq 5 \\ 1 & \text{for } 5 < y \end{cases}$$

- $F_X(2y)$ までで 5 点.
- 結果のみの解答は 0 点.

(e) $f_Y(.) = F'_Y(.)$ より

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y/25 & \text{for } 0 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

- 簡単な微分なので結果のみの解答も可とする.
- 前問の解答と整合的なら 5 点.