

中級統計学：第2回中間試験／経済統計I：最終試験

村澤 康友

提出期限：2021年6月7日(月)

提出方法：My KONAN (甲南) / 授業支援システム (府大)

注意：指定のワードファイルの解答用紙に解答を入力し、pdf ファイルに変換して提出すること。何を参照してもよいが、決して他人と相談しないこと。また自分の解答を決して他人に教えないこと。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいと与えるが、結果のみの解答は0点とする）。

1. (20点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各20字程度）。

- (a) 周辺確率密度関数
- (b) 条件付き期待値
- (c) (確率変数の) 独立性
- (d) 確率収束

2. (30点) (X, Y) は次の2変量正規分布に従う。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

- (a) X と Y の相関係数を求めなさい。
- (b) $U := Y - 2X$ とする。 U の分布を求めなさい。
- (c) $\Pr[|U| < 1]$ を求めなさい。

3. (50点) (X, Y) は次の同時分布に従う。

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/10	1/10	1/10
1	2/10	2/10	3/10

- (a) X と Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい。
- (b) X と Y の1次と2次の積率をそれぞれ求めなさい。
- (c) X と Y の分散をそれぞれ求めなさい。
- (d) XY の分布を求めなさい。
- (e) X と Y の共分散を求めなさい。

解答例

1. 確率の基本用語

(a) X の周辺確率密度関数は, 任意の x について

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

(b) $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き期待値は

$$E(X|Y = y) := \begin{cases} \sum_x x p_{X|Y}(x|Y = y) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y = y) dx & (\text{連続}) \end{cases}$$

(c) 任意の (x, y) について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$$

なら X と Y は独立という.

(d) 任意の $\epsilon > 0$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[|X_n - c| < \epsilon] = 1$$

なら $\{X_n\}$ は c に確率収束するという.

- 「 c に」と収束先を明示しなければ 0 点 (「 ϵ に」とする誤答があった).

2. 2 変量正規分布

(a)

$$\begin{aligned} \text{corr}(X, Y) &= \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{4}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 結果のみの解答は 0 点.

(b)

$$\begin{aligned} E(U) &= E(Y - 2X) \\ &= E(Y) - 2E(X) \\ &= 3 - 2 \cdot 2 \\ &= -1 \\ \text{var}(U) &= \text{var}(Y - 2X) \\ &= \text{var}(Y) - 2 \text{cov}(2X, Y) + \text{var}(2X) \\ &= \text{var}(Y) - 4 \text{cov}(X, Y) + 4 \text{var}(X) \\ &= 4 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

正規分布の線形変換は正規分布なので

$$U \sim N(-1, 4)$$

- 平均 2 点, 分散 4 点, 分布 4 点.

(c) $Z \sim N(0, 1)$ とすると

$$\begin{aligned}\Pr[|U| < 1] &= \Pr[-1 < U < 1] \\ &= \Pr\left[\frac{-1 - (-1)}{2} < \frac{U - 1}{2} < \frac{1 - (-1)}{2}\right] \\ &= \Pr[0 < Z < 1] \\ &= \Pr[Z > 0] - \Pr[Z > 1] \\ &= 0.5 - 0.158655 \\ &= 0.341345\end{aligned}$$

3. 2 変量離散分布

(a)

$$X = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 3/10 \\ 1 & \text{with pr. } 7/10 \end{cases}$$
$$Y = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 3/10 \\ 1 & \text{with pr. } 3/10 \\ 2 & \text{with pr. } 4/10 \end{cases}$$

- 各 5 点.

(b)

$$\begin{aligned}E(X) &:= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{7}{10} \\ &= \frac{7}{10} \\ E(X^2) &:= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{7}{10} \\ &= \frac{7}{10} \\ E(Y) &:= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{4}{10} \\ &= \frac{11}{10} \\ E(Y^2) &:= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{4}{10} \\ &= \frac{19}{10}\end{aligned}$$

- 1 次の積率各 2 点, 2 次の積率各 3 点.

(c)

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{7}{10} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 \\ &= \frac{70}{100} - \frac{49}{100} \\ &= \frac{21}{100} \\ \operatorname{var}(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= \frac{19}{10} - \left(\frac{11}{10}\right)^2 \\ &= \frac{190}{100} - \frac{121}{100} \\ &= \frac{69}{100}\end{aligned}$$

• 各 5 点.

(d)

$$XY = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 5/10 \\ 1 & \text{with pr. } 2/10 \\ 2 & \text{with pr. } 3/10 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{aligned}E(XY) &:= 0 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} \\ &= \frac{8}{10} \\ &= \frac{4}{5} \\ \operatorname{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{4}{5} - \frac{7}{10} \cdot \frac{11}{10} \\ &= \frac{80}{100} - \frac{77}{100} \\ &= \frac{3}{100}\end{aligned}$$