

# 中級統計学：第1回中間試験

村澤 康友

2022年10月25日

**注意：**3問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は0点とする）。

- (20点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各20字程度）。
  - 統計学
  - 確率
  - 確率質量関数
  - (確率変数の) 平均
- (30点)  $X$  は次の累積分布関数をもつ。

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x/3 & \text{for } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{for } 3 < x \end{cases}$$

- $\Pr[1 < X \leq 2]$  を求めなさい。
  - $X$  の確率密度関数を求め、式とグラフで表しなさい。
  - $E(X)$  を求めなさい。
- (50点) 当たる確率が  $1/3$  のくじを2回引いて出た当たりの数を  $X$  とする。すなわち

$$X := \begin{cases} 2 & \text{with pr. } 1/9 \\ 1 & \text{with pr. } 4/9 \\ 0 & \text{with pr. } 4/9 \end{cases}$$

- $X$  の確率質量関数を式とグラフで表しなさい。
- $X$  の累積分布関数を式とグラフで表しなさい。
- $E(X)$  を求めなさい。
- $E(X^2)$  を求めなさい。
- $\text{var}(X)$  を求めなさい。

解答例

1. 確率・統計の基本用語

- (a) ある全体について知るための方法論の体系
- (b) 事象に対して定義され, 以下の公理を満たす関数  $P(\cdot)$ 
  - i.  $0 \leq P(\cdot) \leq 1$
  - ii.  $P(\Omega) = 1$
  - iii. ( $\sigma$  加法性)  $A_1, A_2, \dots$  が排反なら

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- 「確率の公理」に触れなければ 0 点.

- (c) 任意の  $x$  に対して  $\Pr[X = x]$  を与える関数

- (d) 1 次の積率

- 「期待値」も OK.
- 「平均」の定義に「平均」という言葉を使ったらダメ.

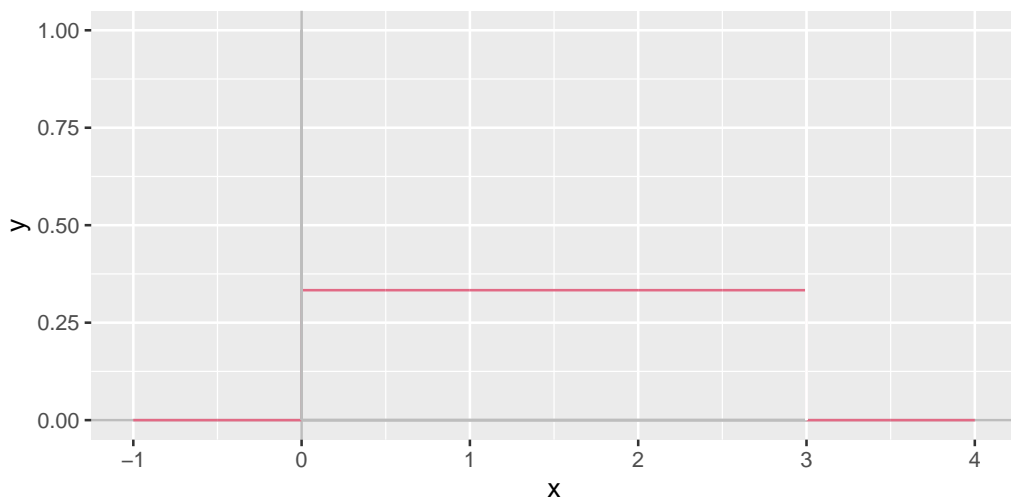
2. 連続分布

- (a)

$$\begin{aligned}\Pr[1 < X \leq 2] &= \Pr[X \leq 2] - \Pr[X \leq 1] \\ &= F_X(2) - F_X(1) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned}f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= \begin{cases} 1/3 & \text{for } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}\end{aligned}$$



- 式・グラフ各 5 点.

(c)

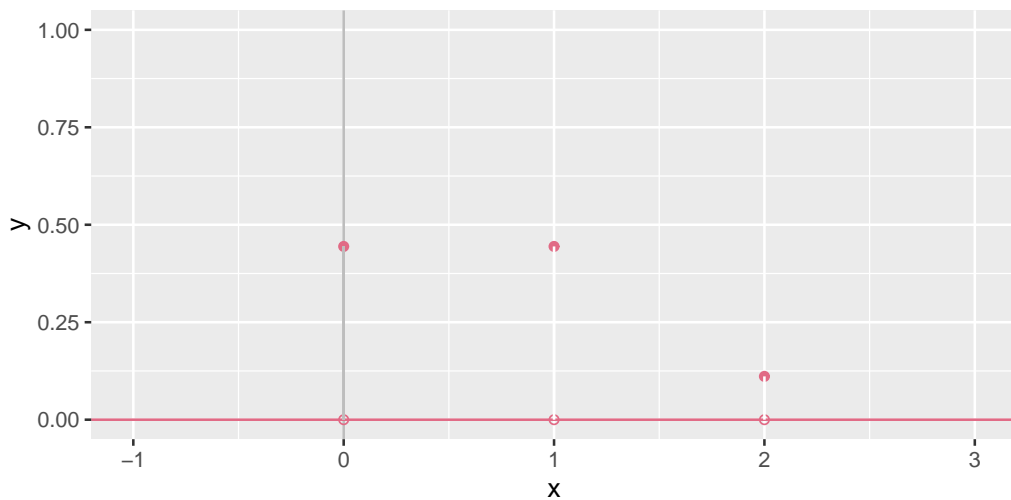
$$\begin{aligned}
 E(X) &:= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\
 &= \int_0^3 x \frac{1}{3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 x dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^3 \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

- $\int_0^3 x(1/3) dx$  で 5 点.
- 期待値の計算過程を示さなければ 0 点.

### 3. 離散分布

(a)

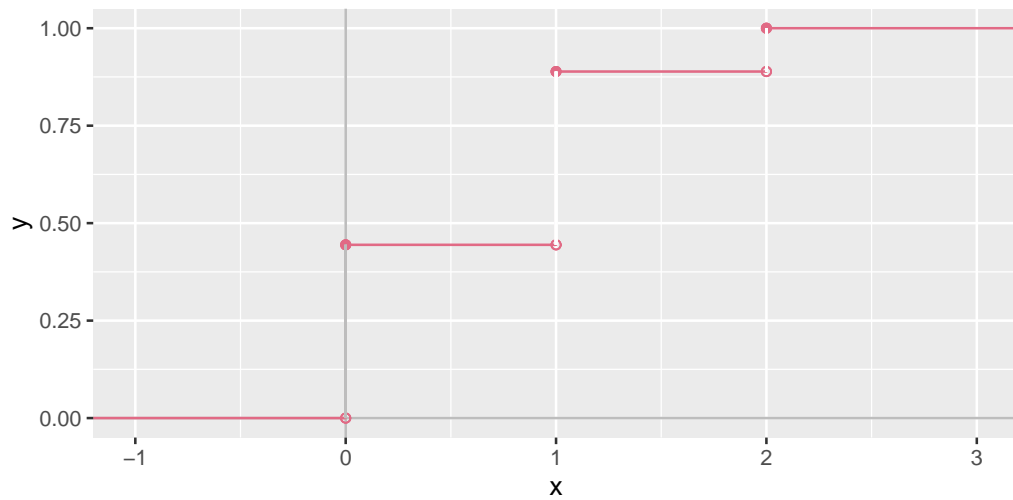
$$p_X(x) := \begin{cases} 4/9 & \text{for } x = 0, 1 \\ 1/9 & \text{for } x = 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



- 式・グラフ各 5 点.
- $x = 0, 1, 2$  以外の確率を 0 と示さなければ 2 点. グラフも同様.

(b)

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 4/9 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 8/9 & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$



- 式・グラフ各 5 点.

(c)

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- 定義に基づく計算式で 5 点.

(d)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{4}{9} + 1^2 \cdot \frac{4}{9} + 2^2 \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

- 定義に基づく計算式で 5 点.

(e)

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

- 分散の計算公式で 5 点.