中級統計学：第 2 回中間試験

村澤 康友

2022 年 11 月 18 日

注意： 3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) ベルヌーイ試行
   (b)（1 変量）正規分布
   (c) 同時累積分布関数
   (d)（確率変数の）相関係数
2. （30 点）ある県における高校 2 年生の男子の身長の平均は 170.5cm，標準偏差は 5.4cm である．身長の分布を正規分布とみなすとき，次の問いの答えよ．ただし小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．
   (a) 身長 180cm 以上の人は約何%いるか．
   (b) 高い方から 3 %以内の位置にいる人の身長は何 cm 以上か．
   (c) 身長が 165cm 以上 170cm 以下の人は約何%いるか．
3. （50 点）2 次元確率ベクトル (X, Y) は以下の同時分布に従う．

$X\backslash Y$	0	1
0	1/6	1/3
1	1/4	1/4

   (a) X, Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい．
   (b) X, Y の平均と分散をそれぞれ求めなさい．
   (c) XY の平均と分散を求めなさい．
   (d) X と Y の共分散を求めなさい．
   (e) $X + Y$ の平均と分散を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 結果が 2 通り（成功／失敗）しかない試行.
   (b) 正規分布の pdf は

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

   - $\sqrt{2\pi}\sigma$ は $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ でもよいが，$\sqrt{2\pi\sigma}$ は誤り.

   (c) (X,Y) の同時 cdf は，任意の (x,y) について

$$F_{X,Y}(x,y) := \Pr[X \le x, Y \le y]$$

   (d) 標準化した確率変数の共分散.
   - $\mathrm{cov}(X,Y)/\left(\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}\right)$ も可.
   - $\mathrm{cov}(X,Y)/\sqrt{\mathrm{var}(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{var}(Y)}$ は不可（式の意味が変わる).

2. 正規分布
   (a) $X \sim \mathrm{N}\left(170.5, 5.4^2\right)$ を標準化すると

$$Z := \frac{X - 170.5}{5.4} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

   $X = 180$ のとき

$$Z = \frac{180 - 170.5}{5.4} = \frac{9.5}{5.4} \approx 1.76$$

   標準正規分布表より

$$\begin{aligned}\Pr[X \ge 180] &\approx \Pr[Z \ge 1.76] \\ &\approx .039204\end{aligned}$$

   したがって約 3.9 %いる.
   - $\Pr[Z \ge 1.76]$ で 5 点.

   (b) $\Pr[X \ge x] = .03$ とする．X を標準化すると

$$\begin{aligned}\Pr[X \ge x] &= \Pr\left[\frac{X - 170.5}{5.4} \ge \frac{x - 170.5}{5.4}\right] \\ &= \Pr\left[Z \ge \frac{x - 170.5}{5.4}\right]\end{aligned}$$

   標準正規分布表より

$$\frac{x - 170.5}{5.4} \approx 1.88$$

   すなわち

$$x \approx 170.5 + 5.4 \cdot 1.88 = 180.652$$

   したがって約 180.7cm 以上.
   - $\Pr[Z \ge 1.88] \approx .03$ で 5 点.

(c) $X = 165$ のとき

$$Z = \frac{165 - 170.5}{5.4} = -\frac{5.5}{5.4} \approx -1.02$$

$X = 170$ のとき

$$Z = \frac{170 - 170.5}{5.4} = -\frac{.5}{5.4} \approx -.09$$

標準正規分布表より

$$\begin{aligned}
\Pr[165 \leq X \leq 170] &= \Pr[-1.02 \leq Z \leq -.09] \\
&= \Pr[.09 \leq Z \leq 1.02] \\
&= \Pr[Z \geq .09] - \Pr[Z \geq 1.02] \\
&= .46414 - .15386 \\
&= .31028
\end{aligned}$$

したがって約 31.0 %いる.

- $\Pr[.09 \leq Z \leq 1.02]$ で 5 点.
- $\Pr[Z \geq .09] - \Pr[Z \geq 1.02]$ で 8 点.

3. 2 変量離散分布

(a)

$$X = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 1/2 \\ 1 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 5/12 \\ 1 & \text{with pr. } 7/12 \end{cases}$$

- 各 5 点.

(b) X の平均と分散は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &:= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
\mathrm{E}\left(X^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Y の平均と分散は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &:= 0 \cdot \frac{5}{12} + 1 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12} \\
\mathrm{E}\left(Y^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{5}{12} + 1^2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12} \\
\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \frac{7}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 \\
&= \frac{35}{144}
\end{aligned}$$

- 平均各 2 点，分散各 3 点.
- 分散の計算公式で各 1 点.

(c) XY の分布は

$$XY = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 3/4 \\ 1 & \text{with pr. } 1/4 \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &:= 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \mathrm{E}\left((XY)^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{3}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \mathrm{var}(XY) &= \mathrm{E}\left((XY)^2\right) - \mathrm{E}(XY)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

- 平均 5 点，分散 5 点.
- 分散の計算公式で 2 点.

(d)

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

- 共分散の計算公式で 2 点.

(e)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X+Y) &= \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \\ &= \frac{13}{12} \\ \mathrm{var}(X+Y) &= \mathrm{var}(X) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{var}(Y) \\ &= \frac{1}{4} + 2\left(-\frac{1}{24}\right) + \frac{35}{144} \\ &= \frac{59}{144} \end{aligned}$$

(別解) $X + Y$ の分布は

$$X + Y = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 1/6 \\ 1 & \text{with pr. } 7/12 \\ 2 & \text{with pr. } 1/4 \end{cases}$$

この平均と分散を (c) と同様に計算してもよい.

- 平均 5 点，分散 5 点.
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ で 2 点.
- $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{var}(Y)$ で 2 点.