中級統計学：第 3 回中間試験

村澤 康友

2022 年 12 月 16 日

注意： 3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）．

1. （20 点）以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   (a) 確率分布の特性を表す定数
   (b) 確率的な標本抽出にともなう統計量の分布
   (c) 標本を用いて 2 つの母集団を比較する問題
   (d) 大標本における推定量の近似的な分布
2. （30 点）分布表を用いて以下の問いに答えなさい．
   (a) $X \sim \chi^2(11)$ とする．$\Pr[a \leq X \leq b] = .98$ となる a, b を求めなさい．
   (b) $Y \sim \mathrm{t}(13)$ とする．$\Pr[|Y| \leq c] = .9$ となる c を求めなさい．
   (c) $Z \sim \mathrm{F}(4, 9)$ とする．$\Pr[d \leq Z \leq e] = .95$ となる d, e を求めなさい．
   なお a〜e はすべて正の実数（$0, \infty$ は含まない）とする．
3. （50 点）K 大生の（1 日平均）睡眠時間の分布を調べたい．母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ と仮定する（μ, σ^2 は未知）．無作為に選んだ K 大生 5 人に睡眠時間を尋ねたところ，5 時間・7 時間・8 時間・9 時間・11 時間という回答が得られた．
   (a) 標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 s^2 を求めなさい．
   (b) $\bar{X}$ と s^2 はどのような分布をもつか？（証明不要）
   (c) $\bar{X}$ の分散の推定値を求めなさい．
   (d) μ の 95 %信頼区間を求めなさい．
   (e) σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 母数（パラメーター）
   (b) 標本分布
   (c) 2 標本問題
   (d) 漸近分布
2. 分布表の読み方
   (a)

$$\begin{aligned}\Pr[a \le X \le b] &= \Pr[X \ge a] - \Pr[X > b] \\ &= .98\end{aligned}$$

これを満たす例は

$$\begin{aligned}\Pr[X \ge a] &= .99 \\ \Pr[X > b] &= .01\end{aligned}$$

χ^2 分布表より $X \sim \chi^2(11)$ なら $a = 3.05348$, $b = 24.7250$.

- 各 5 点.

   (b) t 分布の対称性より

$$\begin{aligned}\Pr[|Y| \le c] &= \Pr[-c \le Y \le c] \\ &= 1 - 2\Pr[Y > c] \\ &= .9\end{aligned}$$

すなわち

$$\Pr[Y > c] = .05$$

t 分布表より $Y \sim \mathrm{t}(13)$ なら $c = 1.771$.

   (c)

$$\begin{aligned}\Pr[d \le Z \le e] &= 1 - \Pr[Z < d] - \Pr[Z > e] \\ &= .95\end{aligned}$$

これを満たす例は

$$\begin{aligned}\Pr[Z < d] &= \Pr\left[\frac{1}{Z} > \frac{1}{d}\right] \\ &= .025 \\ \Pr[Z > e] &= .025\end{aligned}$$

$Z \sim \mathrm{F}(4, 9)$ なら $1/Z \sim \mathrm{F}(9, 4)$ なので F 分布表より $1/d = 8.905$, すなわち $d = 1/8.905$. 同じく F 分布表より $Z \sim \mathrm{F}(4, 9)$ なら $e = 4.718$.

- 各 5 点.

3. 母平均・母分散の区間推定

(a)

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{5+7+8+9+11}{5} \\ &= 8 \\ s^2 &= \frac{(5-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(11-8)^2}{5-1} \\ &= \frac{9+1+0+1+9}{4} \\ &= 5\end{aligned}$$

- 各 5 点.

(b) $\bar{X}, s^2$ の標本分布は

$$\begin{aligned}\bar{X} &\sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right) \\ \frac{4s^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(4)\end{aligned}$$

- 各 5 点.
- $n = 5$ を代入しなければ 1 点減.
- 左辺の $4s^2/\sigma^2$ がなければダメ.

(c) $\bar{X}$ の分散 σ^2/n の推定値は

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{n} &= \frac{5}{5} \\ &= 1\end{aligned}$$

- $n = 5, s^2 = 5$ を代入しなければダメ.
- (a) の s^2 と整合的なら OK.

(d) $\bar{X}$ を標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/5}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/5}} \sim \mathrm{t}(4)$$

t 分布表より

$$\Pr\left[-2.776 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/5}} \le 2.776\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\bar{X} - 2.776\sqrt{\frac{s^2}{5}} \le \mu \le \bar{X} + 2.776\sqrt{\frac{s^2}{5}}\right] = .95$$

$\bar{X} = 8,\ s^2 = 5$ より μ の 95 %信頼区間は $[5.224, 10.776]$.

- 標準化で 2 点.
- t(4) までは 4 点.
- t 分布表の読み取りまでは 6 点.

- $\bar{X}=8,\ s^2=5$ を代入しなければ 2 点減.

(e) $4s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(4)$ なので χ^2 分布表より

$$\Pr\left[.484419 \le \frac{4s^2}{\sigma^2} \le 11.1433\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{4s^2}{11.1433} \le \sigma^2 \le \frac{4s^2}{.484419}\right] = .95$$

$s^2=5$ より σ^2 の 95 %信頼区間は $[1.79, 41.29]$.

- χ^2 分布表の読み取りまでは 5 点.
- $s^2=5$ を代入しなければ 2 点減.