

中級統計学：第1回中間試験

村澤 康友

2023年10月23日

注意：3問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は0点とする）。教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）。

- (20点) 以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい。
 - 一部の観察から全体について推測すること
 - 標準偏差÷平均
 - 試行において起こりうる結果
 - 4次の標準化積率
- (30点) 次の確率変数を考える。

$$X := \begin{cases} 3 & \text{with pr. } 1/4 \\ 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/4 \end{cases}$$

- X の期待値を求めなさい。
 - X の分散を求めなさい。
 - $Y := 2X - 1$ とする。 Y の期待値と分散を求めなさい。
- (50点) X は次の累積分布関数をもつ。

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ (x+1)^2/4 & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$

- X の累積分布関数をグラフで表しなさい。
- $\Pr[X > 0]$ を求めなさい。
- $\Pr[X \leq x] = 1/2$ となる x を求めなさい。
- X の確率密度関数を求め、式とグラフで表しなさい。
- X の期待値を求めなさい。

解答例

1. 確率・統計の基本用語

(a) 統計的推測

- 「推測統計学」は1点減.

(b) 変動係数

(c) 標本点

- 「事象」は不正解.

(d) 尖度

2. 離散分布の期待値と分散

(a)

$$\begin{aligned} E(X) &:= 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

(b) 2乗の期待値は

$$\begin{aligned} E(X^2) &:= 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

分散の計算公式より

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{11}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\ &= \frac{11}{4} - \frac{25}{16} \\ &= \frac{19}{16} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2X - 1) \\ &= 2E(X) - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{5}{4} - 1 \\ &= \frac{3}{2} \\ \text{var}(Y) &= \text{var}(2X - 1) \\ &= \text{var}(2X) \\ &= 4 \text{var}(X) \\ &= 4 \cdot \frac{19}{16} \\ &= \frac{19}{4} \end{aligned}$$

- 各 5 点.

3. 連続分布

(a) 省略

- 切片の値を記載しなければ 2 点減.

(b)

$$\begin{aligned} \Pr[X > 0] &= 1 - \Pr[X \leq 0] \\ &= 1 - F_X(0) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} F_X(x) = \frac{1}{2} &\implies \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{1}{2} \\ &\implies (x+1)^2 = 2 \\ &\implies x+1 = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

$-1 \leq x \leq 1$ より $x = \sqrt{2} - 1$.

- $x = \sqrt{2} - 1$ のみとしなければ 5 点減.

(d) 累積分布関数を微分すると, 確率密度関数は

$$f_X(x) := \begin{cases} (x+1)/2 & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

グラフは省略.

(e)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-1}^1 x \frac{x+1}{2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{x^2+x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$